
DIPLOMARBEIT

Herr Ing.
Wolfgang Artner

**Lebensdaueranalyse
basierend auf
dynamischen Spannungen**

Bad Vöslau, 2017

Fakultät Ingenieurwissenschaften

DIPLOMARBEIT

Lebensdaueranalyse basierend auf dynamischen Spannungen

Autor:
Herr Ing.

Wolfgang Artner

Studiengang:
Maschinenbau / Mechatronik

Matrikelnummer / Seminargruppe:
42690 / KM13wMEA-F

Erstprüfer:
Prof. Dr.-Ing. Martin Zimmermann

Zweitprüfer:
Prof. Dr.-Ing. Günter Willmerding

Einreichung:
Mittweida, August 2017

Verteidigung / Bewertung:
Mittweida, 2017

faculty Ingenieurwissenschaften

DIPLOMA THESIS

Fatigue analysis based on dynamic stresses

author:

Mr. Ing.

Wolfgang Artner

course of studies:

Maschinenbau / Mechatronik

matriculation number / seminar group:

42690 / KM13wMEA-F

first examiner:

Prof. Dr.-Ing. Martin Zimmermann

second examiner:

Prof. Dr.-Ing. Günter Willmerding

submission:

Mittweida, August 2017

defence / evaluation:

Mittweida, 2017

Bibliografische Beschreibung:

Artner Wolfgang:

Lebensdaueranalyse basierend auf dynamischen Spannungen. - 2017- XII, 140, 128 S.

Mittweida, Hochschule Mittweida, Fakultät Ingenieurwissenschaften, Diplomarbeit, 2017

Referat:

Die Lebensdaueranalyse dynamisch belasteter Strukturen stellt eine rechenintensive Aufgabe im Zuge der mechanischen Produktentwicklung dar. Basierend auf Ergebnissen numerischer Simulationsverfahren - wie z. B. der finiten Elemente Methode (FEM) - erfolgt die Ermittlung der zu erwartenden Lebensdauer. Durch die Anwendung modaler Verfahren bei der Lösung der Bewegungsgleichung kann eine Geschwindigkeitssteigerung der FEM Analyse erreicht werden. Aus den Eigenvektoren der diesen Verfahren zugrundeliegenden Schwingformen lässt sich jeweils eine korrespondierende Spannungsverteilung berechnen. Werden diese bei der Lebensdaueranalyse - entsprechend dem Zeitverlauf der generalisierten (modalen) Koordinaten - überlagert, so stellt dies einen sehr effizienten Weg der Schädigungsrechnung dar. Die Genauigkeit der Ergebnisse muss jedoch durch umfangreiche Analysen verifiziert werden. Dieser Prozess lässt sich mit der Software winLIFE durchführen, was anhand der Analyse einer Kurbelwelle gezeigt wird.

Abstract:

Fatigue analysis of dynamically loaded structures is a computational-intensive task during mechanical product development. Based on numerical simulation results - for example, the finite element analysis (FEA) - the expected lifetime is determined. By use of modal methods in the solution of the equations of motion, a speed increase of the FEA can be achieved. A corresponding stress distribution can be calculated from the eigenvectors. By superimposing these stresses according to the history of the generalized (modal) coordinates, a very efficient workflow of assessing the fatigue damage can be attained. However, the accuracy of the results must be verified by extensive analyses. This process is facilitated by the fatigue software winLIFE, as exemplified by the analysis of a crankshaft.

Inhalt

Inhalt I

Abbildungsverzeichnis	IV
Tabellenverzeichnis	X
Abkürzungsverzeichnis	XI
1 Einleitung.....	1
1.1 <i>Motivation.....</i>	1
1.2 <i>Zielsetzung.....</i>	2
1.3 <i>Kapitelübersicht.....</i>	3
2 Grundlagen der Lebensdaueranalyse.....	5
2.1 <i>Einführung in die Lebensdaueranalyse.....</i>	5
2.1.1 Statisches Bauteilversagen	5
2.1.2 Historie der Lebensdaueranalyse	7
2.1.3 Erkennen von Ermüdungsbrüchen	7
2.1.4 Begriffe zur Lebensdaueranalyse	9
2.1.5 Wöhlerlinie und Versuch.....	12
2.1.5.1 Kennzeichnung der Schwingbeanspruchung.....	12
2.1.5.2 Versuchsdurchführung	13
2.1.5.3 Gleichung der Wöhlerlinie	15
2.1.6 Dauer-, Zeitfestigkeit und Mittelspannungseinfluss.....	17
2.1.7 Einflüsse auf die Ermüdungsfestigkeit.....	19
2.1.7.1 Oberflächeneinfluss.....	19
2.1.7.2 Bauteilgröße.....	20
2.1.7.3 Weitere Einflüsse	21
2.1.8 Kerbwirkung	22
2.2 <i>Beschreibung der Belastung/Beanspruchung.....</i>	25
2.2.1 Rainflow-Verfahren.....	26
2.3 <i>Schadensakkumulation</i>	28
2.4 <i>Nachweiskonzepte</i>	30
2.4.1 Spannungsbasierende Analyse	31
2.4.1.1 Nennspannungskonzept.....	31
2.4.1.2 Kerbspannungskonzept.....	32

2.4.1.3	Strukturspannungskonzept.....	32
2.4.2	Analyse mit lokalen Dehnungen.....	33
2.4.3	Rissfortschrittskonzept.....	36
2.5	<i>Der Beanspruchungszustand.....</i>	36
2.5.1	Uniaxial.....	37
2.5.2	Biaxial.....	37
2.5.3	Multiaxial.....	39
2.5.3.1	Das Verfahren der kritischen Schnittebene.....	39
3	Lebensdaueranalyse mit winLIFE.....	43
3.1	<i>Ablauf einer winLIFE Analyse.....</i>	43
3.1.1	Superposition von statischen Einheitslastfällen.....	43
3.1.2	Nichtlineare Analyse.....	45
3.1.3	Superposition von modalen (dynamischen) Einheitslastfällen.....	46
4	Dynamische Analyse und Substrukturen.....	47
4.1	<i>Methoden der dynamischen Analyse.....</i>	47
4.1.1	Die Eigenwertanalyse.....	47
4.1.2	Direkte Analyse des Differentialgleichungssystems.....	49
4.1.3	Modale Analyse.....	50
4.1.4	Statische Kondensation.....	54
4.1.5	Component Mode Synthesis.....	57
4.2	<i>Substrukturen.....</i>	60
4.3	<i>Die Spannungstransformation.....</i>	62
4.4	<i>Verifikation der Reduktionsmethoden.....</i>	63
4.4.1	NFD Kriterium.....	63
4.4.2	MAC Kriterium.....	64
4.4.3	NMD Kriterium.....	65
5	Einführungsbeispiel Biegebalken.....	67
5.1	<i>Beschreibung der Aufgabenstellung.....</i>	67
5.2	<i>Eigenwertanalyse der Substruktur.....</i>	69
5.3	<i>Eigenwertanalyse des Gesamtsystems.....</i>	70
5.4	<i>Freie Schwingung Gesamtsystem.....</i>	71
6	Anwendungsbeispiel Kurbelwelle.....	79
6.1	<i>Beschreibung der Aufgabenstellung.....</i>	79
6.2	<i>FEM Modell der Kurbelwelle.....</i>	82
6.3	<i>CMS Reduktion und Modalanalyse der Kurbelwelle.....</i>	85

6.4	<i>Mehrkörperdynamiksimulation</i>	93
6.4.1	Aufbau des Modells	94
6.4.2	Flexible Abbildung der Kurbelwelle	96
6.4.2.1	Full Flexible Structure (FFlex)	96
6.4.2.2	Reduced Flexible Structure (RFlex)	96
6.4.3	Ergebnisse der dynamischen Simulation	98
6.4.3.1	Rechenzeit	98
6.4.3.2	Verlauf der modalen Koordinaten	99
6.4.3.3	Verlauf der Spannungen	100
6.5	<i>Lebensdaueranalyse</i>	106
6.5.1	FFlex Referenzlösung – nichtlineare Analyse	108
6.5.2	RFlex Analyse – Superposition der modalen Einheitslastfälle	112
6.5.3	Vergleich der Methoden	118
6.5.4	Detailanalyse mit Submodelltechnik	121
7	Zusammenfassung und Ausblick	129
7.1	<i>Zusammenfassung</i>	129
7.2	<i>Anforderungen für die Umsetzung in winLIFE</i>	131
7.3	<i>Ausblick</i>	131
Literatur	133
Anhang	139
Anhang, Teil 1		
Anhang, Teil 2		
Anhang, Teil 3		
Selbstständigkeitserklärung		

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm / Quelle: [DTM].....	6
Abbildung 2: Gewaltbruchfläche einer Keilwelle / Quelle: [RMM]	8
Abbildung 3: Ermüdungsbruchfläche einer Ritzelwelle / Quelle: [RMM]	8
Abbildung 4: Ermüdungsbruchbilder von Rundstabproben / Quelle: [RVE]	9
Abbildung 5: Problemfeld der Ermüdungsfestigkeit / Quelle: [RVE].....	10
Abbildung 6: Wöhlerlinie und Begriffe der Betriebsfestigkeit / Quelle: [HAB]	11
Abbildung 7: Schwingenspiel des Dauerschwingversuchs / Quelle: [RVE].....	12
Abbildung 8: Beanspruchungsbereiche im Dauerschwingversuch / Quelle: [RVE]	13
Abbildung 9: Statistische Auswertung der Schwingfestigkeitsversuche / Quelle: [HAB] ..	15
Abbildung 10: Normierte Wöhlerlinien - Typ 1 - nach der FKM-RL / Quelle: [RVE].....	16
Abbildung 11: Normierte Wöhlerlinien - Typ 2 - nach der FKM-RL / Quelle: [RVE].....	16
Abbildung 12: Darstellung von Wöhlerlinie und Haigh-Diagramm / Quelle: [WL1]	18
Abbildung 13: Haigh-Diagramm nach der FKM-RL / Quelle: [RVE].....	19
Abbildung 14: Rautiefenabhängiger Abminderungsfaktor / Quelle: [RVE]	20
Abbildung 15: Dauerfestigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur / Quelle: [RVE]	21
Abbildung 16: Spannungsverlauf am Wellenabsatz / Quelle: [RSH].....	22
Abbildung 17: Formzahlen für gekerbte Rundstäbe bei Biegung / Quelle: [RSH]	23
Abbildung 18: Bezogenes Spannungsgefälle / Quelle: [RVE].....	25
Abbildung 19: Stufen- und Standardkollektive der Beanspruchung / Quelle: [WL2].....	26
Abbildung 20: Ablauf des Rainflow-Verfahrens / Quelle: [WL1].....	27

Abbildung 21: Varianten der Wöhlerlinien / Quelle: [WL2]	29
Abbildung 22: Nachweiskonzepte, Rissgröße und Lastspielzahlen / Quelle: [RVE]	30
Abbildung 23: Ablaufschema Nennspannungskonzept / Quelle: [RVE].....	31
Abbildung 24: Ablaufschema Kerbspannungskonzept / Quelle: [RVE]	32
Abbildung 25: Kraft-Dehnungs- und Spannungs-Dehnungs-Pfad / Quelle: [WL2].....	34
Abbildung 26: Dehnungs-Wöhlerlinie und zugehörige Bezeichnungen / Quelle: [HAB]....	35
Abbildung 27: Ablaufschema Kerbdehnungskonzept / Quelle: [RVE]	35
Abbildung 28: Unterscheidung der Beanspruchungsarten / Quelle: [WL2].....	37
Abbildung 29: Vergleich der Festigkeitshypothesen (ESZ) / Quelle: [RVE].....	38
Abbildung 30: Ablaufschema der multiaxialen Analyse mit Superposition / Quelle: [WL2]44	
Abbildung 31: Ablaufschema der nichtlinearen multiaxialen Analyse / Quelle: [WL2]	45
Abbildung 32: Darstellung zum Faltungssatz / Quelle: [WKM]	49
Abbildung 33: Gesamtmodell eines Flugzeugs / Quelle: [NXN2]	61
Abbildung 34: Gesamtmodell mit Superelementen / Quelle: [NXN2]	61
Abbildung 35: NFD Plot - Matrix und Hauptdiagonalelemente	64
Abbildung 36: MAC Plot - Matrix und Hauptdiagonalelemente	65
Abbildung 37: NMD Plot für die Modenpaare (2,2) – links - und (17,16) - rechts	66
Abbildung 38: Beispiel Biegebalken - Gesamtsystem.....	67
Abbildung 39: Beispiel Biegebalken - Substruktur	68
Abbildung 40: Statische Vordeformation des Biegebalkens.....	68
Abbildung 41: Relative Abweichung der Eigenfrequenzen der Substruktur	70
Abbildung 42: Relative Abweichung der Eigenfrequenzen des Gesamtsystems.....	71
Abbildung 43: Verschiebungsverlauf - direktes Verfahren	72

Abbildung 44: Verschiebungsverlauf - GUYAN Superelement	72
Abbildung 45: Verschiebungsverlauf - CMS Superelement ($nq = 8$).....	73
Abbildung 46: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 1	74
Abbildung 47: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 3.....	74
Abbildung 48: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 7.....	74
Abbildung 49: Biegespannungsverlauf - direktes Verfahren	75
Abbildung 50: Biegespannungsverlauf - GUYAN Superelement	75
Abbildung 51: Biegespannungsverlauf - CMS Superelement ($nq = 8$).....	76
Abbildung 52: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 3.....	77
Abbildung 53: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 4.....	77
Abbildung 54: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 10.....	77
Abbildung 55: Schnittbild 4-Zylinder Reihenmotor mit Kolbenzuordnung	80
Abbildung 56: Zeitverlauf der Gaskräfte (K1 bis K4) für einen Verbrennungszyklus	80
Abbildung 57: Geometrie der Kurbelwelle	82
Abbildung 58: FE-Netz der Kurbelwelle.....	83
Abbildung 59: Detailansichten FE-Netz Kurbelwelle.....	83
Abbildung 60: RBE2 Anbindung der Lagerstellen (Interface Nodes)	84
Abbildung 61: FE-Netz Submodell des Kurbelwellenausschnitts.....	84
Abbildung 62: Fixed Base Mode Shapes Nr. 1 bis 5	86
Abbildung 63: Fixed Base Mode Shapes Nr. 6 bis 10	87
Abbildung 64: Eigenformen der Kurbelwelle Nr. 1 bis 5	88
Abbildung 65: Eigenformen der Kurbelwelle Nr. 6 bis 10.....	89
Abbildung 66: NFD Kriterium - Hauptdiagonalelemente der Matrizen.....	91

Abbildung 67: MAC Kriterium - Matrix Plot	92
Abbildung 68: MAC Kriterium - Hauptdiagonalelemente der Matrizen	93
Abbildung 69: Komponenten des MKS-Modells.....	94
Abbildung 70: Lagerungsbedingungen im MKS-Modell	95
Abbildung 71: RFlex Auswahl der Moden mit Dämpfungswerten in RECURDYN.....	97
Abbildung 72: Contourplot der Deformation der Kurbelwelle mit Gas- und Lagerkräften .	98
Abbildung 73: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e10_d1	99
Abbildung 74: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e20_d1	99
Abbildung 75: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e30_d1	100
Abbildung 76: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e40_d1	100
Abbildung 77: Lage der Auswerteknoten (N911/N912).....	101
Abbildung 78: SEQV vs. Angle - N911 – FFlex_e_d1	101
Abbildung 79: SEQV vs. Angle - N911 – FFlex_e_d2.....	102
Abbildung 80: SEQV vs. Time - N912 – FFlex_e_d1 und d2	102
Abbildung 81: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e10%%_d1	104
Abbildung 82: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e10%%_d1	104
Abbildung 83: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e40%%_d1	105
Abbildung 84: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e40%%_d1	105
Abbildung 85: Parameter der Wöhlerlinie für die Kurbelwelle aus 42CrMo4	106
Abbildung 86: Wöhlerlinie der Kurbelwelle (R = -1)	107
Abbildung 87: Haigh-Diagramm (nach FKM) der Kurbelwelle.....	107
Abbildung 88: Vergleichsspannungsverlauf (STM) – N911 - FFlex_e_d1	108
Abbildung 89: RM - N911 – FFlex_e_d1.....	108

Abbildung 90: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N912 – FFlex_e_d1.....	109
Abbildung 91: RM - N912 – FFlex_e_d1	109
Abbildung 92: S1 vs. Winkel - N911 - FFlex_e_d1	110
Abbildung 93: S1 vs. S2/S1 - N911 - FFlex_e_d1	110
Abbildung 94: S1 vs. Winkel - N912 - FFlex_e_d1	111
Abbildung 95: S1 vs. S2/S1 - N912 - FFlex_e_d1	111
Abbildung 96: WL mit Schädigungsanteil des Kollektivs - N911 - FFlex_e_d1	112
Abbildung 97: WL mit Schädigungsanteil des Kollektivs - N912 - FFlex_e_d1	112
Abbildung 98: Vergleichsspannungsverlauf (STM) – N911 - RFlex_e30r1_d1	113
Abbildung 99: RM - N911 – RFlex_e30r1_d1.....	113
Abbildung 100: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N912 - RFlex_e40r2_d1	114
Abbildung 101: RM - N912 – RFlex_e40r2_d1.....	114
Abbildung 102: Schadenssumme der Schnittebenen - N911 - RFlex_e30r1_d1	115
Abbildung 103: Schadenssumme der Schnittebenen - N912 - RFlex_e40r2_d1	115
Abbildung 104: S1 vs. Winkel - N911 - RFlex_e30r1_d1.....	116
Abbildung 105: S1 vs. S2/S1 - N911 - RFlex_e30r1_d1.....	116
Abbildung 106: S1 vs. Winkel - N912 - RFlex_e40r2_d1.....	117
Abbildung 107: S1 vs. S2/S1 - N912 - RFlex_e40r2_d1.....	117
Abbildung 108: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 911	120
Abbildung 109: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 912.....	120
Abbildung 110: Submodell mit Cut-Boundary Knoten.....	122
Abbildung 111: SEQV - Submodell - Mode 1 (links) und Mode 2 (rechts)	123
Abbildung 112: SEQV - Submodell - Mode 3 (links) und Mode 4 (rechts)	123

Abbildung 113: SEQV - Submodell - Mode 5 (links) und Mode 6 (rechts).....	123
Abbildung 114: SEQV - Submodell - Mode 7 (links) und Mode 8 (rechts).....	124
Abbildung 115: SEQV - Submodell - Mode 9 (links) und Mode 10 (rechts).....	124
Abbildung 116: Schadenssumme Submodell - RFlex_e20r2_d1	125
Abbildung 117: Schadenssumme Submodell - RFlex_e20r2_d1	125
Abbildung 118: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1.....	126
Abbildung 119: RM - N34118 Submodell- RFlex_e20r2_d1.....	126
Abbildung 120: S1 vs. Winkel - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1.....	127
Abbildung 121: S1 vs. S2/S1 - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1	127

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vergleichsspannungshypothesen für den multiaxialen Fall / Quelle: [WL2]	40
Tabelle 2: Dimension der Vektoren und Matrizen bei unvollständiger Transformation.....	53
Tabelle 3: Eigenfrequenzen [Hz] der Substruktur	69
Tabelle 4: Eigenfrequenzen [Hz] des Gesamtsystems	70
Tabelle 5: Modellvarianten der Kurbelwelle.....	85
Tabelle 6: Berechnete Eigenfrequenzen der Kurbelwelle [Hz].....	90
Tabelle 7: Modellvarianten mit Anzahl der RFI Moden (modale DOFs)	97
Tabelle 8: Vergleich der Rechenzeiten (CPU time) bei der MKS Simulation [s].....	98
Tabelle 9: Referenzlösung der Lebensdaueranalyse – Schadensumme am Knoten.....	109
Tabelle 10: Schadensumme am Knoten Nr. 911	118
Tabelle 11: Schadensumme am Knoten Nr. 912.....	118
Tabelle 12: Relative Abweichung der Schadensumme am Knoten Nr. 911	119
Tabelle 13: Relative Abweichung der Schadensumme am Knoten Nr. 912.....	119
Tabelle 14: Zuordnung der Auswerteknoten - Gesamt- zu Submodell.....	125
Tabelle 15: Schadensumme Gesamt- vs. Submodell – RFlex_e20r2_d1	126

Abkürzungsverzeichnis

CMS	Component Mode Synthesis
BEM	Boundary Element Method
DMS	Dehnungsmessstreifen
DOF	Degree of Freedom
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methode
FFlex	Full Flexible
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese
GND	Ground
MAC	Modal Assurance Criterion
MBD	Multi Body Dynamics
MDOF	Master Degree of Freedom
MFBD	Multi Flexible Body Dynamics
MKS	Mehrkörpersimulation
MSF	Modal Scale Factor
NFD	Natural Frequency Difference
NH	Normalspannungshypothese
NMD	Normalized Modal Difference
RFlex	Reduced Flexible
RM	Rainflow Matrix
SDOF	Slave Degree of Freedom
SEQV	v. Mises Vergleichsspannung (entspricht GEH)
SH	Schubspannungshypothese

STM Spannungs Tensor Modifikation

WL Wöhlerlinie

1 Einleitung

Die Vorhersage von Ermüdungsbrüchen dynamisch beanspruchter Bauteile beschäftigt Ingenieure seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und hat seither nichts an Aktualität verloren. Der stetige Drang nach immer leichteren, kostengünstigeren, aber auch zuverlässigeren Produkten verlangt eine sichere Dimensionierung der Komponenten, um Schäden an Maschinen und Anlagen zu vermeiden und eine folgende Gefährdung für Menschen auf ein Minimum zu reduzieren.

Durch den Einsatz moderner Rechentechnik mit numerischen Lösungsverfahren ist es möglich, eine detaillierte Analyse der Beanspruchungszustände durchzuführen und darauf aufbauend eine Prognose der zu erwartenden Wahrscheinlichkeit eines Schadenseintritts zu erstellen.

Es wurden Verfahren entwickelt, die es ermöglichen den Aufwand für dynamische Analysen zu reduzieren. Den Verfahren ist gemein, dass mit abnehmendem Aufwand auch die Qualität der Ergebnisse - und somit auch die der folgenden Lebensdaueranalyse - abnimmt. Die Prüfung der Eignung dieser Verfahren zum Zweck der Lebensdaueranalyse dynamisch beanspruchter Komponenten ist Gegenstand der vorliegenden Diplomarbeit.

Der Verfasser dieser Arbeit ist seit Juni 2009 als geschäftsführender Gesellschafter der AWOTEC GmbH, einem Ingenieurbüro für Maschinenbau, tätig. Im Bereich der Lebensdaueranalyse arbeitet die Firma eng mit dem Hersteller der Software winLIFE, dem Steinbeis Transferzentrum für Neue Technologien in der Verkehrstechnik, zusammen. Dessen Leiter, Prof. Dr. Günter Willmerding, erklärte sich dankenswerterweise bereit, diese Diplomarbeit als externer Betreuer zu begleiten.

1.1 Motivation

Für die Berechnung des Verhaltens von Maschinen, Anlagen und technischen Systemen werden numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungssystemen eingesetzt. Die Finite Elemente Methode (FEM) und die Mehrkörperdynamik (MKS) sind solche Verfahren, die in der Entwicklung von mechanischen und mechatronischen Systemen zur Anwendung kommen.

Im Bereich der Statik sind Rechenmodelle mit mehreren Millionen Freiheitsgraden durchaus üblich, die in akzeptabler Zeit auf handelsüblicher Hardware gelöst werden können. Für den Zweck der Lebensdaueranalyse werden Ergebnisse dieser statischen Berechnungsmodelle zusammen mit dem Zeitverlauf der Belastungen verwendet, sofern keine Schwingungen im System angeregt werden. Ist die Dynamik des Systems jedoch relevant

(wenn die Erregerfrequenz größer als ein Drittel der niedrigsten Systemeigenfrequenz ist), muss die Simulation diese miteinfassen, wozu spezielle Verfahren zum Einsatz kommen. Der Rechenaufwand steigt im Vergleich zu statischen Analysen jedoch erheblich.

Um den Aufwand dieser dynamischen Analysen so gering wie möglich zu halten, kommen Verfahren zur Reduktion der Freiheitsgrade zum Einsatz. Die Methode der „Component Mode Synthesis“ (CMS) verwendet dazu die Eigenschwingungsformen der Bauteile, was besonders bei vibrationsbeanspruchten Komponenten von Vorteil ist. Die elastische Deformation wird dabei durch eine Linearkombination einer ausreichenden Anzahl an Eigenschwingungsformen angenähert. Zu jedem dieser Eigenvektoren existiert eine korrespondierende Spannungsverteilung, welche auch als „modale Spannung“ bezeichnet wird. Die auftretende Spannungsverteilung kann wiederum durch eine Überlagerung dieser modalen Spannungen ermittelt werden. Basierend auf diesen Daten kann eine Lebensdaueranalyse - analog zu dem eingangs erwähnten Verfahren mit Ergebnissen aus statischen Analysen - durchgeführt werden.

Das Ziel einer Lebensdaueranalyse ist die Berechnung der Schädigung am jeweiligen Nachweispunkt unter den gegebenen Belastungsbedingungen, woraus die Wahrscheinlichkeit für einen Schadenseintritt abgeleitet werden kann. Die Methode der kritischen Schnittenebene ist ein Verfahren, um basierend auf einer Spannungstensor-Zeitfunktion diese Analysen durchzuführen.

Bei Vorliegen des zeitlichen Verlaufs der modalen Koordinaten als Ergebnis einer dynamischen FEM oder MKS Simulation und der modalen Spannungen kann eine Überlagerung in der Lebensdaueranalysesoftware erfolgen und somit eine effiziente Analyse ohne den Zwischenschritt der Berechnung des Spannungstensor-Zeitverlaufs für jeden Nachweispunkt im FEM oder MKS Programm durchgeführt werden.

Für den Anwender einer Software zur Lebensdaueranalyse kann diese Vorgehensweise zu einer Steigerung der Effizienz führen. Vor allem eine Reduktion der Rechenzeit verbunden mit geringeren Datenmengen sind zu erwarten.

1.2 Zielsetzung

Die Prüfung der Eignung von modal reduzierten Strukturen zur Lebensdaueranalyse nach dem Verfahren der Superposition von modalen Einheitslastfällen, sowie die Umsetzung des Verfahrens mit der Software winLIFE sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Die Einführung in die Themengebiete der Lebensdauer- sowie der dynamischen Analyse bildet die Grundlage für die im Anschluss folgenden Beispiele.

Zunächst wird anhand eines einfachen Beispiels der Vergleich zwischen der direkten Lösung des Differentialgleichungssystems und der Lösung mit reduzierten Teilgebieten, sogenannten Superelementen, diskutiert. Die Lösung erfolgt auf analytischem Weg und soll

auch als Referenz für numerische Lösungsverfahren - wie FEM und MKS Analysen - herangezogen werden.

Ziel der Diskussion des Beispiels ist es einerseits, die Unterschiede zwischen der direkten Lösung des Differentialgleichungssystems gegenüber der Lösung unter Verwendung von Superelementen aufzuzeigen, andererseits aber auch die Identität der Ergebnisse bei vollständiger Transformation zu beweisen.

Ein weiterer Punkt der Betrachtungen sind die „modalen Spannungen“, die zur Berechnung des tatsächlichen Spannungs-Zeitverlaufs verwendet werden und deren Gleichheit mit der direkten Spannungsberechnung gezeigt werden soll.

Anhand des Anwendungsbeispiels einer Kurbelwelle eines 4-Zylinder Verbrennungsmotors wird die Anwendung der Methode in der Praxis diskutiert. Vor allem die Frage der Genauigkeit der Analysen und die Möglichkeiten zur Beurteilung derselben sollen erörtert werden.

Ziel der Arbeit ist es, die Eignung der Superposition von modalen Einheitslastfällen als Methode zur Lebensdaueranalyse von dynamisch belasteten Strukturen mit der Software winLIFE zu untersuchen.

1.3 Kapitelübersicht

Die Arbeit besteht aus insgesamt 7 Kapiteln.

Das **1. Kapitel** führt in die Aufgabenstellung ein und erläutert die Ziele der durchgeführten Untersuchungen.

Kapitel 2 gibt eine Einführung in das Gebiet der Lebensdaueranalyse. Aufbauend auf den historischen Entwicklungen werden die Grundlagen der Analyseverfahren sowie die Einflüsse auf die Ermüdungsfestigkeit erläutert.

Die Durchführung der Lebensdaueranalyse dynamisch beanspruchter Komponenten mit der Software winLIFE ist Gegenstand von **Kapitel 3**.

Im **4. Kapitel** folgen die mathematischen Grundlagen der dynamischen Analyse sowie der Verfahren zur Reduktion des Gleichungssystems, mit Fokus auf deren Anwendung bei Substrukturen.

Diese zuvor dargestellten Grundlagen werden anhand eines einfachen Beispiels - ein Biegebalken in der Form eines n - Massen Schwingers - in **Kapitel 5** diskutiert. Der Schwerpunkt liegt auf der Gegenüberstellung der Verfahren und der Ergebnisse.

Anhand der Analyse einer Kurbelwelle wird die Praxistauglichkeit des gesamten Verfahrens diskutiert. **Kapitel 6** umfasst die Beschreibung der Analysen und der Ergebnisse sowie der angewandten Verifikationsmethoden.

Schließlich werden in **Kapitel 7** die Ergebnisse der Untersuchungen zusammengefasst, sowie ein Ausblick auf mögliche weitere vertiefende Studien gegeben.

Die Anhänge Teil 1 und Teil 2 beinhalten die Ergebnisplots der MKS Simulation mit RECURDYN und die der Lebensdaueranalyse mit winLIFE. Die Berechnungsblätter zum Einführungsbeispiel sind im Anhang Teil 3 ersichtlich.

2 Grundlagen der Lebensdaueranalyse

Die Lebensdaueranalyse dynamisch beanspruchter Komponenten ist ein fixer Bestandteil der Produktentwicklungsprozesse im Maschinen- und Fahrzeugbau. Getrieben durch die Forderung nach immer effizienteren und ressourcenschonenderen Produkten, die unmittelbar den Leichtbau der Komponenten zur Folge hat, werden Bauteile bis hin zu ihrer Belastungsgrenze beansprucht. Die Ansprüche hinsichtlich Sicherheit und Zuverlässigkeit hingegen erfordern eine ausreichende Bemessung gegen Bauteilversagen, was in diesem Zusammenhang meist mit dem Bruch der Komponente in Zusammenhang gebracht wird. Der Ingenieur hat nun die Aufgabe diese beiden - auf den ersten Blick konträren - Forderungen zu vereinen und eine konstruktive Lösung zu schaffen, die den gestellten Ansprüchen genügt.

Die moderne Lebensdaueranalyse ermöglicht, unter Anwendung rechnergestützter Methoden, die Wahrscheinlichkeit eines Schadenseintritts aufgrund zyklischer oder regelloser, mit der Dauer der Beanspruchung veränderlicher, Belastung vorherzusagen und somit eine sichere Dimensionierung zu ermöglichen.

2.1 Einführung in die Lebensdaueranalyse

2.1.1 Statisches Bauteilversagen

Erreicht die statische Belastung eines Bauteils einen kritischen Grenzwert, so führt dies bei den gebräuchlichen Ingenieurwerkstoffen wie Stahl, Aluminium und Eisengusswerkstoffen, zu einem Versagen¹ des Werkstoffs in der Form eines Bruchs an der kritischen Stelle. Dieser offensichtliche, durch alltägliche Beobachtungen bestätigte, Zusammenhang lässt sich anschaulich für den eindimensionalen Beanspruchungszustand mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm darstellen. Dieses Diagramm entspricht den Messungen beim sogenannten Zugversuch, bei welchem ein genormter Probekörper so lange einer Zugbelastung ausgesetzt wird, bis der Bruch der Probe eintritt.

¹ Neben dem Bruch eines Bauteils kann das Versagen auch durch andere Kriterien wie z. B. einer unzulässig hohen Deformation definiert sein.

Der erste lineare Bereich wird durch das Hooksche² Gesetz beschrieben und lässt sich wie folgt anschreiben:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Die Spannung σ steht für die innere Beanspruchung und lässt sich aus einer Materialkonstante, dem Elastizitätsmodul E , und der lokalen Dehnung³ ε bestimmen. Für die Dehnung gilt der Zusammenhang:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

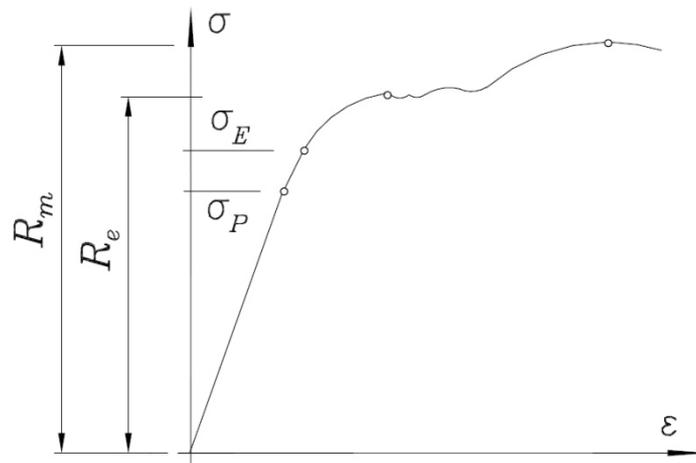


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm / Quelle: [DTM]

Das dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm⁴ ist typisch für zähe Baustähle. Das Ende des linear-elastischen Bereichs ist durch die Proportionalitätsgrenze σ_P markiert. Die Elastizitätsgrenze σ_E kennzeichnet den Punkt, bis zu dem nach dem Entlasten keine bleibende Verformung gemessen werden kann. Die Streckgrenze R_e beschreibt den Fließbeginn des Werkstoffs, welcher durch Versetzungen im Metallgitter hervorgerufen wird. Die Zugfestigkeit wird mit R_m bezeichnet. Ab diesem Punkt ist eine sichtbare plastische Deformation erkennbar. Wenig später erfolgt der Bruch.

² Robert Hook, Englischer Physiker, 1635 - 1703

³ Der Begriff „Dehnung“ wird für den eindimensionalen, „Verzerrung“ für den mehrdimensionalen Fall verwendet.

⁴ Im Rahmen dieser Arbeit wurde bei Fachbegriffen, bei denen mehrere Schreibweisen in der Fachliteratur üblich sind, eine einheitliche Schreibweise gewählt.

Tritt jedoch eine Belastung wiederholt auf, so reicht mitunter ein Beanspruchungsniveau unterhalb der Fließgrenze aus um – abhängig von der Anzahl der Lastspiele – einen Bruch des Bauteils zu bewirken. Dieses Versagen wird als „Ermüdungsbruch“ oder auch als „Schwingbruch“ bezeichnet.

2.1.2 Historie der Lebensdaueranalyse

Wilhelm Albert beobachtete bereits 1829 anhand von Brüchen an Eisenminen-Aufzugsketten dieses Verhalten. William J. M. Rankine untersuchte in den 1840er-Jahren Brüche an Achsen von Lokomotiven. August Wöhler führte zwischen 1850 und 1870 die ersten gründlichen Lebensdaueruntersuchungen durch, konstruierte Lebensdauer-Testmaschinen und führte den Begriff der „Schwingfestigkeit“ ein. Basquin zeigte 1910, dass eine log-log Abhängigkeit aus den Untersuchungen Wöhlers ableitbar ist. 1924 schlug A. Palmgren eine lineare Schadens-Akkumulationshypothese vor, die Miner 1945 aufgriff und den praktischen Nutzen für die Konstruktion zeigte.⁵

Neben den ursprünglich verwendeten spannungsbasierenden Verfahren wurden dehnungsbasierende Methoden und die Rissfortschrittsrechnung entwickelt um für die jeweilige Aufgabenstellung die Vorhersagegenauigkeit zu verbessern.

Schadensfälle an Maschinen und Anlagen der letzten Jahrzehnte, mit teilweise verheerendem Ausgang, zeigen die Notwendigkeit einer präventiven Analyse des Bauteilversagens aufgrund wiederholter Belastung. Besonders in Erinnerung bleiben der Untergang der Bohrplattform Alexander L. Kielland (1980), der Verlust des Rumpfberteils einer Boeing 737 (1988) oder das tragische Zugunglück von Eschede (1998). (Siehe auch [HAB] und [RVE] jeweils Kapitel 1).

2.1.3 Erkennen von Ermüdungsbrüchen

Wie lässt sich nun ein Ermüdungsbruch von einem Bruch durch statische Überlastung unterscheiden? Das Erscheinungsbild der Bruchfläche gibt darüber Auskunft.

Statische Belastungen führen zu Gewaltbrüchen mit (meist) stark zerklüfteten, grobkörnigen Bruchflächen (Abbildung 2).

Die Fläche eines Ermüdungsbruchs hingegen zeigt ausgehend vom Ort des Anrisses eine feinkörnige Schwingbruchfläche. Auf dieser sind die sogenannten Rastlinien erkennbar, die Zonen mit unterschiedlicher Risswachstumsgeschwindigkeit (die Rissfortschrittsbänder) begrenzen. Sobald der Restquerschnitt eine für die statische Beanspruchung

⁵ Ausführliche historische Anmerkungen und weitere Beispiele zur Entwicklung der Lebensdaueranalyse sind in den winLIFE Seminarunterlagen [WL2] Kapitel 1 enthalten.

kritische Größe erreicht hat, tritt ein Gewaltbruch ein. Die Risseinleitung erfolgt auf mikroskopischer Ebene durch das gegenseitige Abgleiten von Kristallgittern aneinander. Der Anrissort liegt dabei meist an der Oberfläche von Bauteilen, wo die höchsten Spannungen auftreten. Durch die Verbindung dieser sogenannten „Risskeime“ zu einem Riss tritt die Phase des makroskopischen Risswachstums ein.

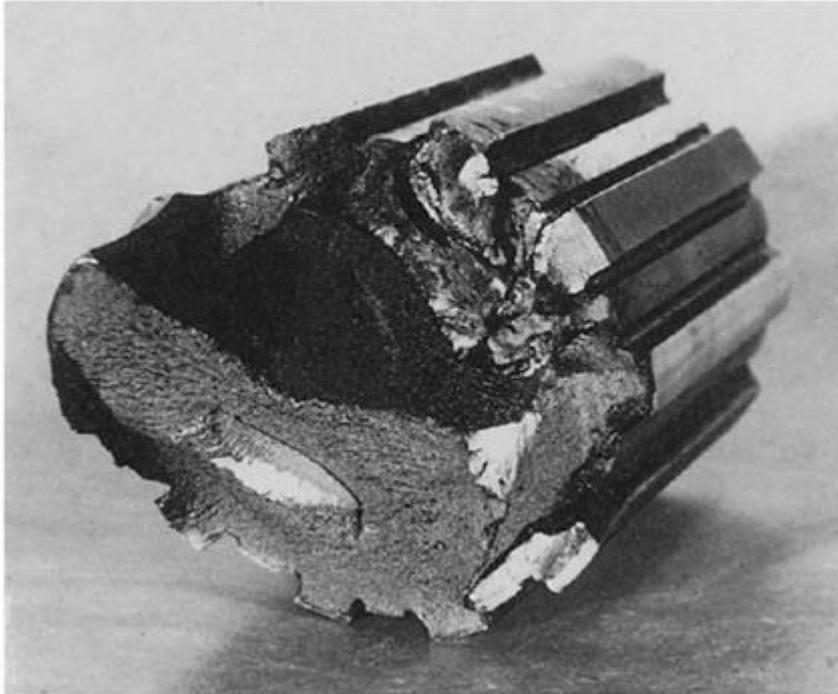


Abbildung 2: Gewaltbruchfläche einer Keilwelle / Quelle: [RMM]

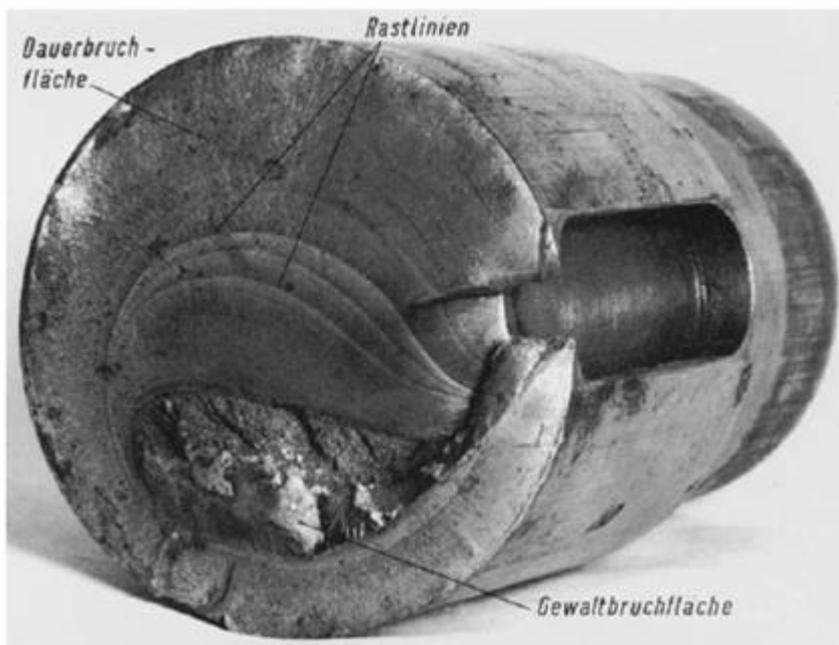


Abbildung 3: Ermüdungsbruchfläche einer Ritzelwelle / Quelle: [RMM]

Die beiden Abbildungen der Bruchflächen sollen beispielhaft den jeweiligen Charakter der Bruchart darstellen. In der Realität ist jede Bruchfläche einzigartig und von vielen Einflussfaktoren abhängig. Einen Überblick über typische Ermüdungsbruchbilder geben Radaj und Vormwald ([RVE] S. 6) anhand einer Tabelle für Rundstabproben. Derartige Referenzen können im Schadensfall helfen, die Ursache der Überlastung zu identifizieren.

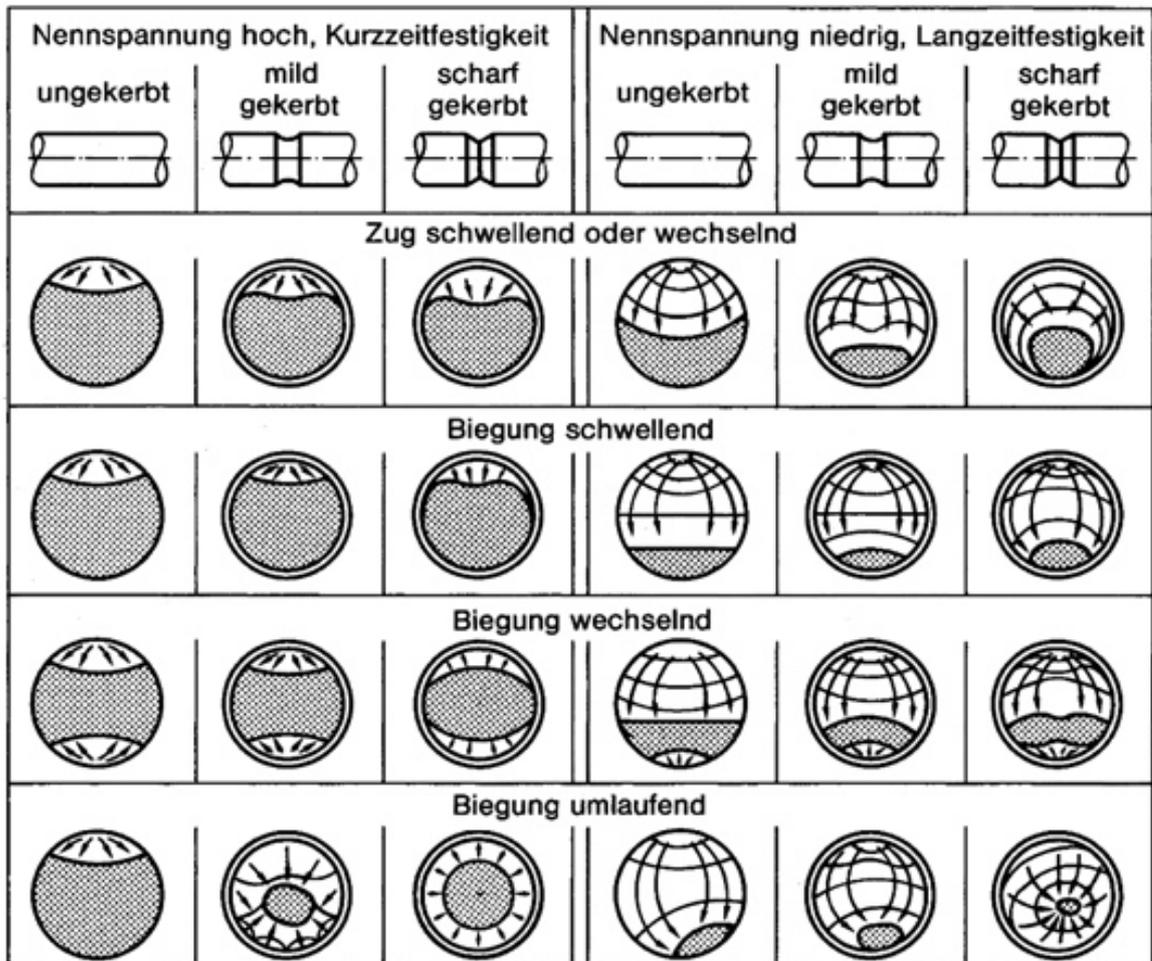


Abbildung 4: Ermüdungsbruchbilder von Rundstabproben / Quelle: [RVE]

2.1.4 Begriffe zur Lebensdaueranalyse

Je nach Literaturquelle werden unterschiedliche Begriffe im Bereich der Lebensdaueranalyse verwendet. Im Folgenden werden die Definitionen von Radaj und Vormwald ([RVE] S. 10) beschrieben und für die weiteren Ausführungen übernommen.

Ermüdungsfestigkeit ist der Überbegriff für Schwingfestigkeit und Betriebsfestigkeit. Die Schwingfestigkeit zeichnet sich durch periodisch wiederholende Belastungen aus, während bei der Betriebsfestigkeit ein zufälliger, aperiodisch-deterministischer Lastverlauf vorliegt.

Radaj und Vormwald merken dazu an: „Während bei Betrachtungen der Schwingfestigkeit eine Entkopplung der Einflußgrößen in gewissem Maße möglich ist, ist die Kopplung der Parameter bei Fragen der Betriebsfestigkeit vielfach nicht aufhebbar. Die Verallgemeinerung der im Einzelfall gewonnenen Erkenntnisse ist dadurch erschwert.“⁶ ([RVE] S. 10).

Der Begriff Gestaltfestigkeit hebt hervor, dass die örtliche Ermüdungsfestigkeit nicht nur vom Werkstoff, sondern auch von einer Vielzahl weiterer Einflüsse abhängig ist. Die folgende Darstellung geht auf Haibach zurück und wird von Radaj und Vormwald zur Beschreibung der Zusammenhänge verwendet. Basierend auf der Schwingfestigkeit der ungekerbten Probe ergibt sich über die Formzahl und die Kerbwirkung die Wöhlerlinie der gekerbten Probe. Unter Berücksichtigung weiterer Bauteileigenschaften wie Bauteilform und -größe oder Oberflächenbeschaffenheit wird die Bauteilschwingfestigkeit abgeleitet.

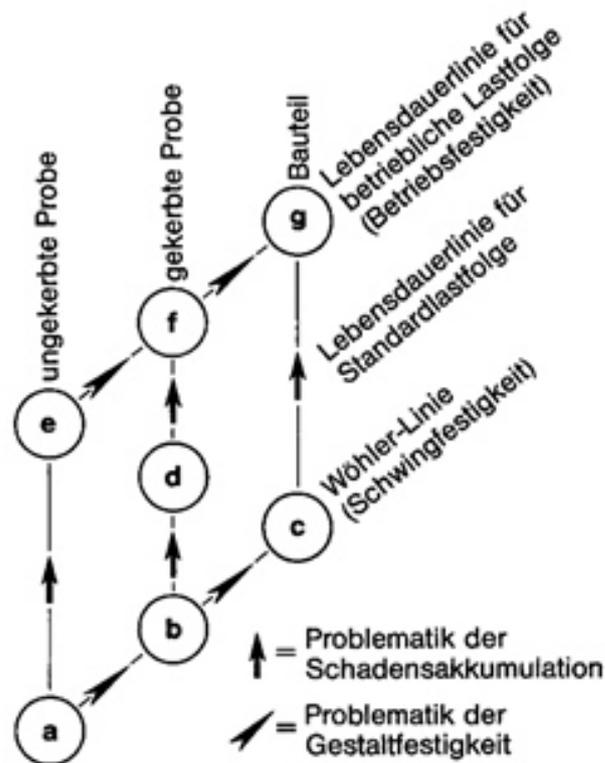


Abbildung 5: Problemfeld der Ermüdungsfestigkeit / Quelle: [RVE]

Des Weiteren wird zwischen Dauer- und Zeitfestigkeit unterschieden. Die Dauerfestigkeit S_D ist jener Beanspruchungsgrenzwert, bis zu dessen Höhe eine schwingende Beanspruchung (b) beliebig oft ohne Bruch ertragbar ist. Wird dieser Grenzwert überschritten, so führt dies nach einer endlichen Anzahl von Schwingspielen zum Bruch. Eine anschauliche

⁶ Zitate werden jeweils in der Originalform übernommen, daher enthalten sie teilweise eine alte Form der Rechtschreibung, beziehungsweise weicht die Schreibung mancher Fachausdrücke von der in dieser Arbeit gewählten Form ab.

Darstellung ist im Schwingfestigkeitsdiagramm - auch Wöhler-Diagramm genannt - möglich. In diesem werden die Spannungsgrenzwerte über der jeweils ertragbaren Schwingzahl dargestellt. Man bewegt sich nun im Zeitfestigkeitsbereich.

Liegt weiterhin eine Belastung mit konstanter Amplitude (c) vor, so kann die ertragbare Anzahl der Belastungszyklen durch den Schnittpunkt mit der sogenannten Wöhlerlinie bestimmt werden. Tritt hingegen die Belastung in einer Form mit variabler Amplitude und Mittelwert (d) auf (bei gleichbleibenden Maximum) so liegt eine geringere Beanspruchungssituation vor. Mit dem tatsächlichen Belastungskollektiv kann die Lebensdauerlinie (auch Gaßner⁷ Linie genannt) abgeleitet werden. Die ertragbare Schwingzahl erhöht sich mitunter erheblich.

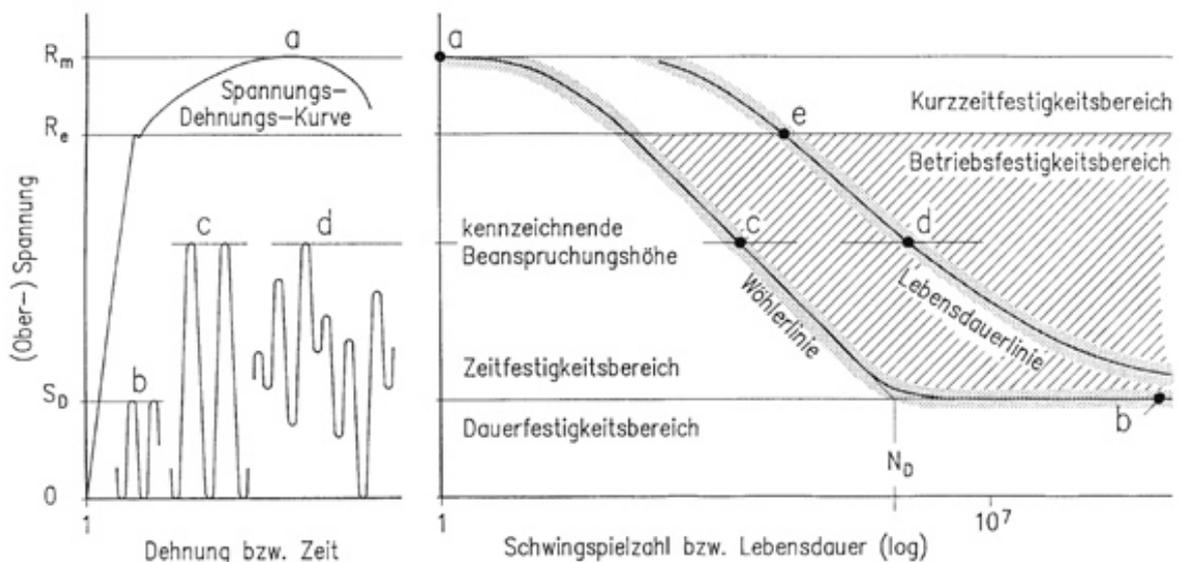


Abbildung 6: Wöhlerlinie und Begriffe der Betriebsfestigkeit / Quelle: [HAB]

Zu den Begriffen Schwingbeanspruchung, Schwingfestigkeit und auch Schwingzahl führen Issler, Ruoff und Häfele eine äußerst wichtige Bemerkung an: „Es ist ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß man im Sinne der Festigkeitsberechnung unter Schwingbelastung nicht nur hochfrequente Schwingungen, sondern auch sehr langsame Lastfluktuationen (z. B. einmal pro Stunde oder Tag) versteht.“ ([IRH] S. 328). Die Verwendung des Begriffs „Schwingung“ im Bereich der Lebensdaueranalyse ist also nicht gleichzusetzen mit dem in der Mechanik verwendeten Begriff der Schwingung der sich auf dynamische Vorgänge bezieht.

⁷ E. Gaßner; Begründer und Bahnbrecher der Lehre der Betriebsfestigkeit ([HAB] S. 7)

2.1.5 Wöhlerlinie und Versuch

2.1.5.1 Kennzeichnung der Schwingbeanspruchung

Zur Ermittlung der ertragbaren Schwingspiele für ein Beanspruchungsniveau werden genormte Werkstoffproben auf speziellen Prüfmaschinen so lange wiederholt belastet, bis der Bruch der Proben eintritt. Die Anforderungen an diesen Versuch sind nach DIN 50100 [N1] genormt.

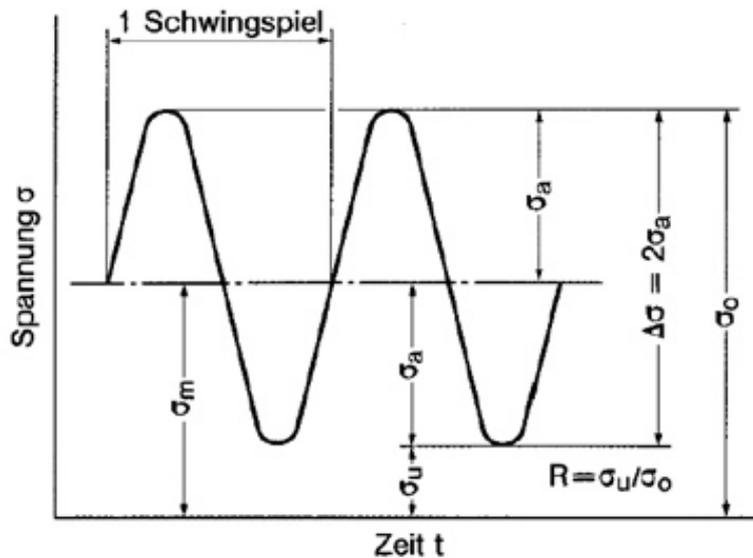


Abbildung 7: Schwingspiel des Dauerschwingversuchs / Quelle: [RVE]

Die Beschreibung eines Schwingspiels der Beanspruchung erfolgt durch die Spannungsamplitude σ_a mit der Mittelspannung σ_m . Alternativ werden auch die Ober- und Unterspannung (σ_o und σ_u) verwendet. Die Schwingweite $\Delta\sigma$ und das Spannungsverhältnis R lassen sich daraus ableiten.

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_o - \sigma_u) = \frac{1}{2}\sigma_o(1 - R) = \sigma_m \frac{1 - R}{1 + R} \quad (3)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_o + \sigma_u) = \frac{1}{2}\sigma_o(1 + R) = \sigma_a \frac{1 + R}{1 - R} \quad (4)$$

$$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a = \frac{2\sigma_a}{1 - R} = \frac{2\sigma_m}{1 + R} \quad (5)$$

$$\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a = \frac{2\sigma_a R}{1 - R} = \frac{2\sigma_m R}{1 + R} \quad (6)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_o - \sigma_u = 2\sigma_a \quad (7)$$

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad (8)$$

Die Bezeichnung σ steht in den angeführten Gleichungen für einen allgemeinen Spannungskennwert, also gleichermaßen für Normal- und Schubspannungen sowie für Kerb- oder Nennspannungen. In den letzten Jahren wurden - um Verwechslungen vorzubeugen - vermehrt S und T für Nennspannungen sowie σ und τ für lokale (Kerb-) Spannungen verwendet. Diese Schreibweise benutzt zum Beispiel auch die FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“ [FKM] (ein häufig verwendetes Regelwerk zur Festigkeitsbewertung).

Es lassen sich drei unterschiedliche Beanspruchungsbereiche (Druckschwell-, Wechsel- und Zugschwellbeanspruchung) in Abhängigkeit von der Spannungsamplitude und der Mittelspannung definieren, die für die Charakterisierung einer Beanspruchung verwendet werden (Abbildung 8). Hervorzuheben sind die reine Wechselbeanspruchung ($R = -1$), die reine Zugschwellbeanspruchung ($R = 0$), die reine Druckschwellbeanspruchung ($R = \pm\infty$) sowie die statische Zug- oder Druckbeanspruchung ($R = 1$). Diese werden zur Abgrenzung charakteristischer Bereiche des Dauerfestigkeitsschaubilds nach Haigh (siehe Kapitel 2.1.6) sowie in vielen Berechnungsvorschriften (z. B. [FKM]) als Bezugsgrößen verwendet.

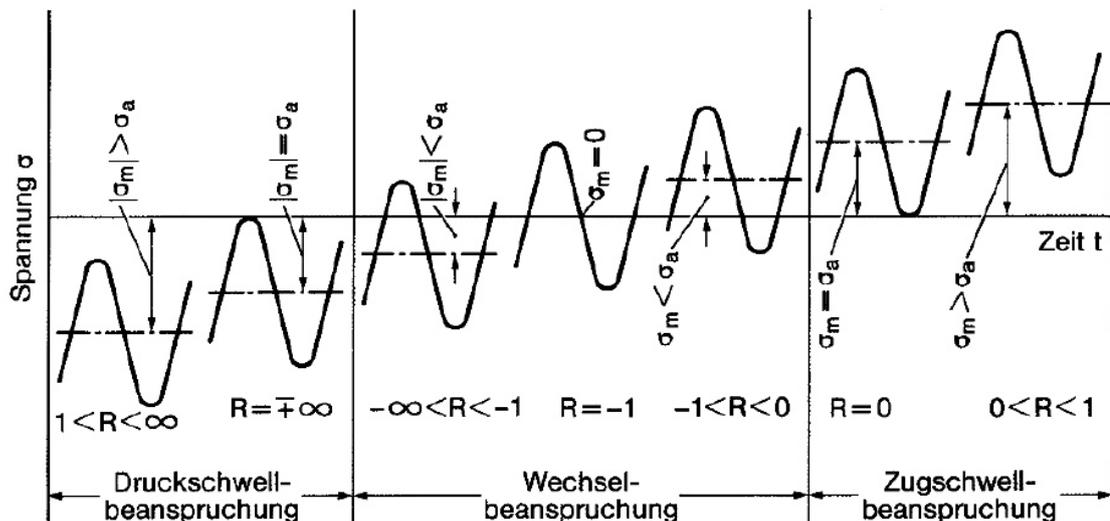


Abbildung 8: Beanspruchungsbereiche im Dauerschwingversuch / Quelle: [RVE]

2.1.5.2 Versuchsdurchführung

Die experimentelle Bestimmung der Schwingfestigkeit kann entweder an glatten oder gekerbten Proben, bauteilähnlichen Prüflingen oder an realen Bauteilen durchgeführt werden ([IRH] S. 339). Zur Ermittlung der Daten einer Wöhlerlinie ist es erforderlich, mehrere Versuche bei unterschiedlichen Belastungsniveaus durchzuführen, wobei das Span-

nungsverhältnis R (8) dabei jeweils konstant gehalten wird. Naturgemäß wird bei wiederholter Versuchsdurchführung - bei gleichbleibenden Belastungsbedingungen - die Lastspielzahl bis zum Bruch⁸ nicht exakt gleich sein. Vielmehr ergibt sich ein Streubereich, der bei einer hinreichenden Anzahl von Proben einer statistischen Verteilung unterliegt. Die Versuche werden für unterschiedliche Belastungsniveaus durchgeführt. Unter Anwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, kann ein Schwingfestigkeitswert für eine definierte Überlebenswahrscheinlichkeit berechnet werden. Nach Rossow ([HAB] S. 30) lautet die Gleichung der Überlebenswahrscheinlichkeit für jeden Versuchswert j einer Anzahl von n Versuchen mit den jeweils ertragbaren Schwingspielzahlen N :

$$P_{\bar{u}} = \frac{3j - 1}{3n + 1} \quad (9)$$

Bei den Schwingfestigkeitsversuchen wird aufgrund der verhältnismäßig langen Dauer der Versuchsdurchführung eine relativ geringe Anzahl an Stichproben je Belastungsniveau verwendet. Radaj und Vormwald geben hier eine Anzahl von 6 bis 10 Proben bei 5 Beanspruchungshorizonten als typisch an ([RVE] S. 44). Es werden auch noch andere Gleichungen zur Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit (z. B. nach Weibull, Schmidt oder Hück) verwendet. Details dazu sind in [RVE] S. 46 enthalten. Werden diese Versuchswerte nun im Wahrscheinlichkeitsnetz eingetragen, lassen sich die Schwingspielzahlen für 10% ($N_{0,1}$) und 90% ($N_{0,9}$) Überlebenswahrscheinlichkeit ablesen, woraus direkt die Streuspanne (T_N), als Grundlage für die Standardabweichung s , folgt:

$$T_N = \frac{N_{0,9}}{N_{0,1}} \quad (10)$$

$$s = \frac{1}{2,56} \log \frac{1}{T_N} \quad (11)$$

Abbildung 9 zeigt die Übertragung der im Wahrscheinlichkeitsnetz aufgetragenen Versuchspunkte auf die Wöhlerlinie mit den ermittelten Kurven für 90%, 50% und 10% Überlebenswahrscheinlichkeit. Für die Darstellung der Wöhlerlinie ist die lineare Skalierung der Achsen ungeeignet, da eine vernünftige Auflösung der Versuchsergebnisse nicht möglich ist. Die halblogarithmische Darstellung ermöglicht eine bessere Auflösung der Schwingspiele. Die doppellogarithmische Variante ermöglicht eine lineare Abbildung des Streubandes und wird deshalb bevorzugt eingesetzt ([IRH] S. 338).

⁸ Der Bruch der Probe wird als Versagenskriterium bei spannungsbasierenden Versuchen mit Normproben verwendet. Es können jedoch auch andere Kriterien, wie z. B. ein Riss definierter Länge, herangezogen werden.

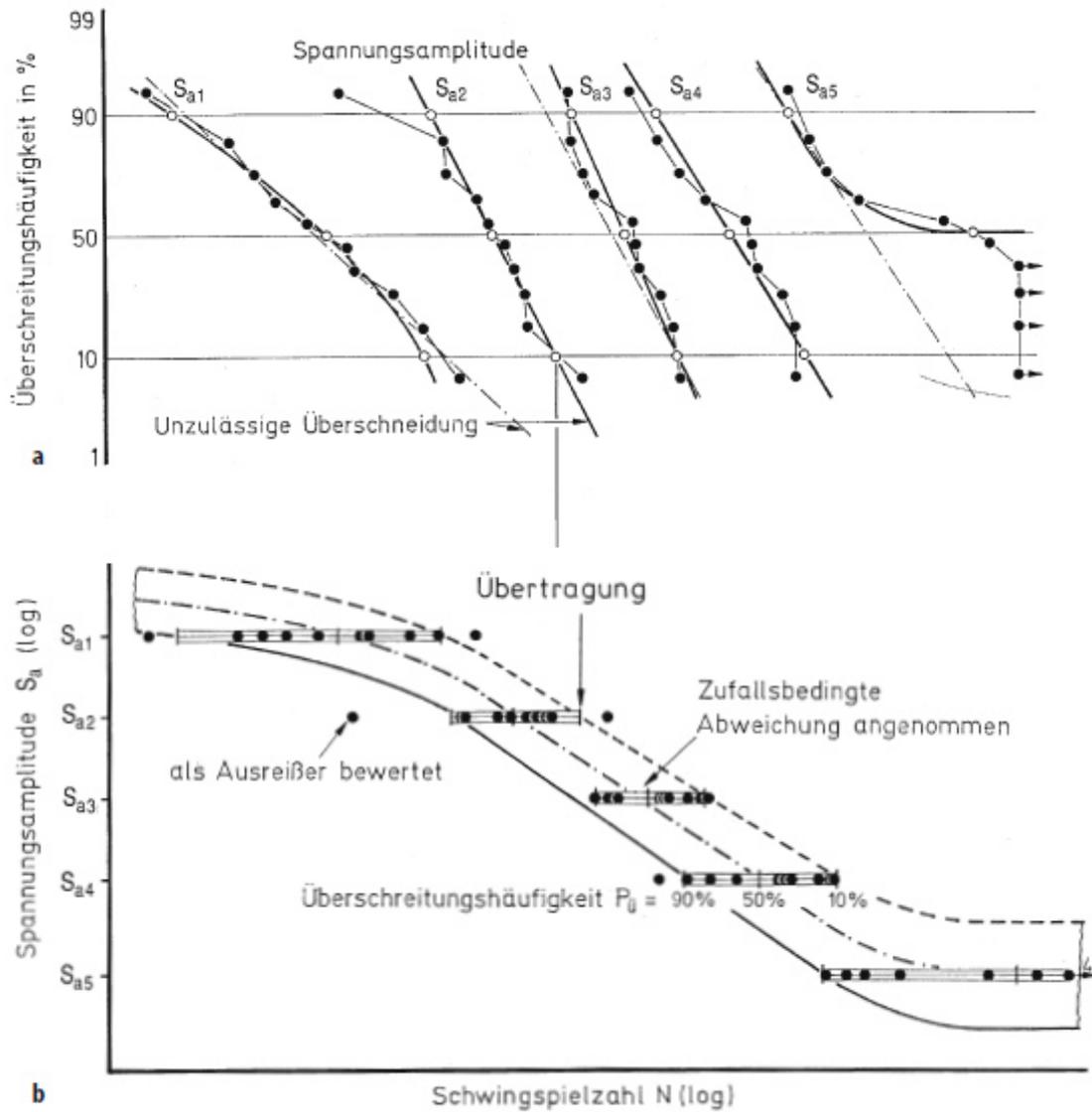


Abbildung 9: Statistische Auswertung der Schwingfestigkeitsversuche / Quelle: [HAB]

2.1.5.3 Gleichung der Wöhlerlinie

Aus dem Verlauf der ermittelten Linien im doppellogarithmischen Diagramm lässt sich der Zusammenhang zwischen Spannungsamplitude und Lastspielzahl durch die von Basquin eingeführte Gleichung ([RVE] S. 22) beschreiben.

$$\sigma_a = \sigma_D \left(\frac{N_D}{N} \right)^{\frac{1}{k}} \tag{12}$$

Als Bezugspunkt wird hier der Übergang vom Zeit- in den Dauerfestigkeitsbereich gewählt (siehe auch Abbildung 6). Dieser Abknickpunkt der Dauerfestigkeit ist durch das Wertepaar N_D und σ_D definiert. Die Größe k im Exponenten bezeichnet die Neigung der Wöhlerlinie. Es ist jedoch anzumerken, dass auch jedes andere bekannte Wertepaar (N, σ_a) als Bezugspunkt gewählt werden kann.

Diese Beschreibung ist jedoch nicht für alle Werkstoffe zutreffend, sodass im Laufe der Zeit alternative Varianten entwickelt wurden. Haibach gibt diesbezüglich einen chronologischen Überblick ([HAB] S. 25). Eine für manche Werkstoffe zutreffendere Beschreibung, welche auch in der FKM Richtlinie [FKM] für Aluminiumlegierungen übernommen wurde, ist die Einführung eines weiteren Bereichs mit definiertem Steigungsexponenten, der dann in den horizontalen Dauerfestigkeitsbereich übergeht.

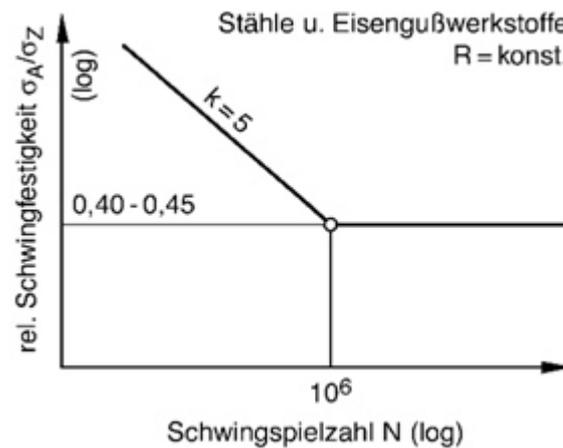


Abbildung 10: Normierte Wöhlerlinien - Typ 1 - nach der FKM-RL / Quelle: [RVE]

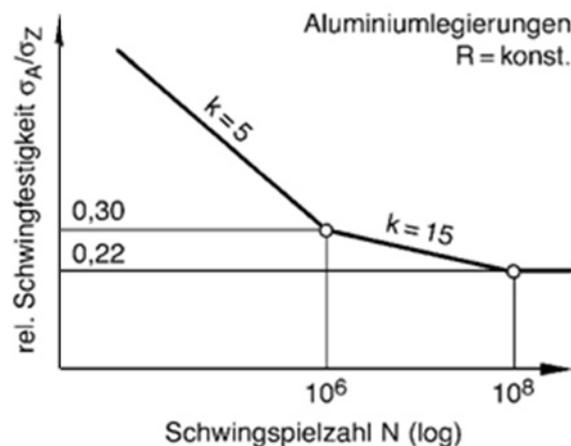


Abbildung 11: Normierte Wöhlerlinien - Typ 2 - nach der FKM-RL / Quelle: [RVE]

Die Neigungskennzahlen k sind nicht nur vom Werkstoff, sondern auch von zusätzlichen Faktoren wie der Kerbschärfe, der Oberflächenbeschaffenheit und anderen abhängig (Siehe Kapitel 2.1.7).

Die normierten Wöhlerlinien werden durch die Einführung eines einheitlichen Streubandes für alle Versuchspunkte abgeleitet und eignen sich für die Festlegung von zulässigen Spannungen bei der Bauteilauslegung ([RVE] S. 24).

Wichtig für die Verwendung von Spannungswerten und Zyklenzahlen aus Schwingfestigkeitsdiagrammen ist der erforderliche Bezug auf die zugrundeliegende Überlebenswahrscheinlichkeit. Gegebenenfalls muss eine Umrechnung von z. B. $P_{\bar{u}} = 50\%$ auf $P_{\bar{u}} = 97.5\%$ erfolgen, um einen regelwerkskonformen Festigkeitsnachweis zu ermöglichen.

2.1.6 Dauer-, Zeitfestigkeit und Mittelspannungseinfluss

Für die bisherigen Erläuterungen der Wöhlerlinie wurde bei der Versuchsdurchführung von einem konstanten Spannungsverhältnis R (8) ausgegangen. In der Regel wird $R = -1$, also eine Wechselbeanspruchung, für die Ermittlung der Wöhlerlinie verwendet. Ändert sich jedoch R , so hat dies einen anderen Verlauf der Wöhlerlinie zur Folge. Dieser Effekt wird als Mittelspannungsempfindlichkeit bezeichnet. Für unterschiedliche Zeithorizonte lassen sich jeweils ein Dauer- oder Zeitfestigkeitsdiagramm erstellen, das diesen Zusammenhang widerspiegelt. Die Form des Diagramms nach Haigh eignet sich besonders für die Darstellung der Zusammenhänge. Alternative Ausführungen z. B. nach Smith, Moore, Gerber oder Goodman sind in [RVE] S. 26 beschrieben.

Eine besonders anschauliche Darstellung und Erläuterung der Zusammenhänge zwischen Wöhlerlinie und Haigh-Diagramm ist im winLIFE Handbuch [WL1] S. 220 enthalten:

„Die Wöhlerlinie wird erhalten, wenn

- *nur die Sa-N-Ebene betrachtet wird. Dies ist die am meisten verwendete Form der Wöhlerlinie für die Mittelspannung Null und das Spannungsverhältnis $R = -1$. Findet man an einer Wöhlerlinie keine Angabe über eine Mittelspannung oder ein Spannungsverhältnis, so wird diese Variante mit $R = -1$ vorliegen.*
- *Wird eine Schnittebene parallel zur Sa-N-Ebene betrachtet, so ist die Mittelspannung ungleich Null. In manchen Sonderfällen, wenn z. B. eine statische Vorlast existiert, sind derartige Wöhlerlinien nützlich, da dann die Schadensakkumulationsrechnung ohne Mittelspannungskorrektur dieser Wöhlerlinien durchgeführt werden kann.*
- *Projiziert man eine Linie für ein Spannungsverhältnis R ungleich -1 in die Sa-N-Ebene, so erhält man eine Wöhlerlinie für dieses Spannungsverhältnis R . Neben den meist verwendeten Wöhlerlinien findet man oft auch solche für rein schwelende Beanspruchung, was einem Spannungsverhältnis $R = 0$ entspricht.*

Ein Haigh Diagramm wird erhalten

- *indem in die Sa-Sm-Ebene Linien gleicher Lastspielzahl projiziert werden. Wird nur die Dauerfestigkeitslinie dargestellt, so wird dies als Haigh-Dauerfestigkeitsdiagramm bezeichnet, werden auch die Zeitfestigkeitslinien dargestellt, so wird dies als Haigh-Zeitfestigkeitsdiagramm bezeichnet.“*

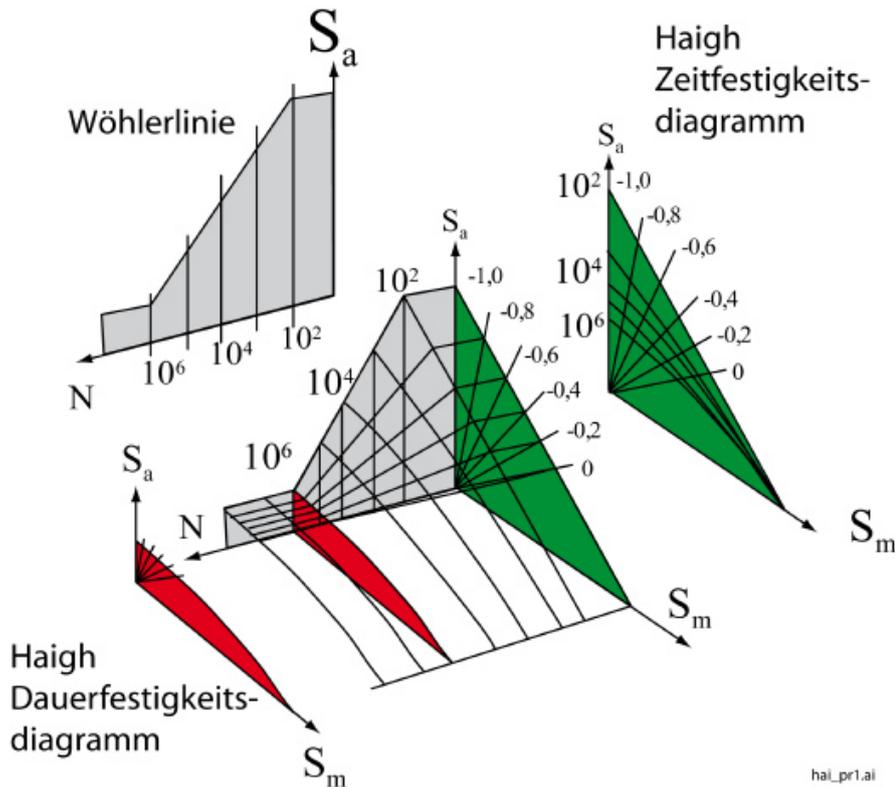


Abbildung 12: Darstellung von Wöhlerlinie und Haigh-Diagramm / Quelle: [WL1]

Die Mittelspannungsempfindlichkeit berechnet sich nach Schütz ([RVE] S. 31) aus dem Verhältnis der Spannungsamplituden bei wechselnder ($R = -1$) zu der bei schwelender Beanspruchung ($R = 0$).

$$M = \frac{\sigma_A(R = -1)}{\sigma_A(R = 0)} - 1 \quad (13)$$

Der Grenzfall $M = 0$ bedeutet, dass kein Abfall der Spannungsamplitude σ_a (3) bei steigender Mittelspannung σ_m (4) auftritt. Der Grenzfall $M = -1$ hingegen bedeutet eine konstante zulässige Oberspannung σ_o (5) bei zunehmender Mittelspannung.

In der FKM Richtlinie wurde die Beschreibung des Haigh-Diagramms dahingehend erweitert, dass im Bereich zwischen $R = 0$ und $R = 0.5$ die Mittelspannungsempfindlichkeit auf ein Drittel reduziert wird. Unterhalb von $R = -\infty$ und überhalb von $R = 0.5$ tritt kein Einfluss der Mittelspannung auf die Spannungsamplitude auf (siehe Abbildung 13).

Im Bereich der Zeitfestigkeit wird eine weitere Unterteilung vorgenommen. Von Kurzzeitfestigkeit wird bei einer ertragbaren Zyklenzahl bis ca. 10000 Zyklen gesprochen. Die bisher diskutierten spannungsbasierenden Verfahren verlieren in diesem Bereich an Genauigkeit, stattdessen werden dehnungsbasierende Konzepte verwendet (siehe Kapitel 2.4.2). Der Bereich mit mehr als zehntausend Lastspielen wird als Langzeitfestigkeit bezeichnet.

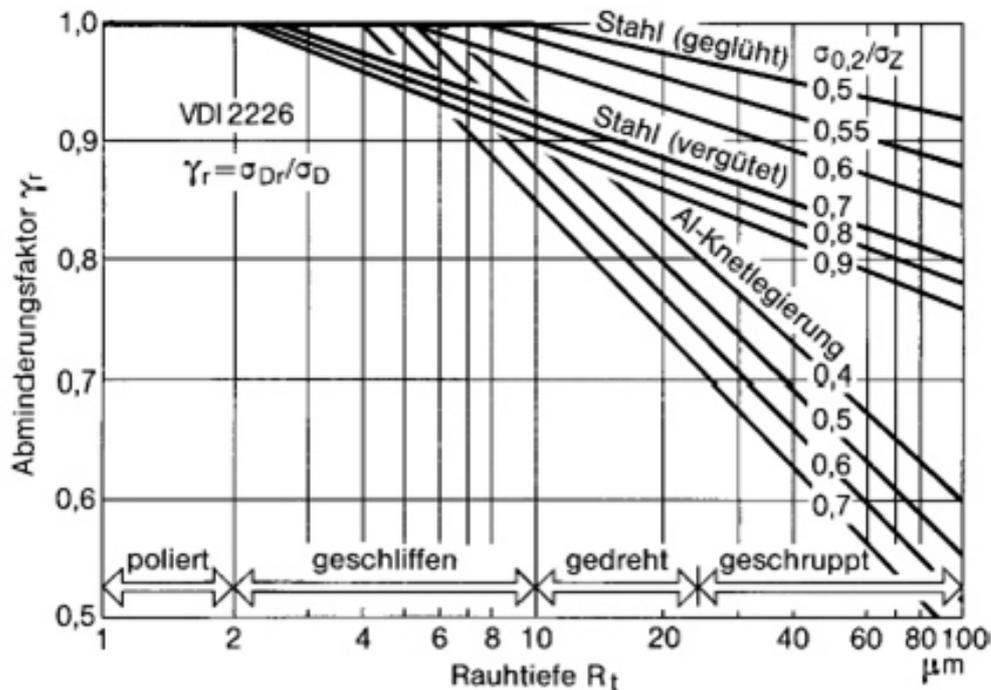


Abbildung 14: Rautiefenabhängiger Abminderungsfaktor / Quelle: [RVE]

2.1.7.2 Bauteilgröße

Die Schwingfestigkeitsversuche werden in der Regel mit verhältnismäßig kleinen Proben durchgeführt. Werden nun die auf diesem Weg ermittelten Festigkeitskennwerte für die Bemessung von größeren Bauteilen verwendet, so führt dies zu einer Überschätzung der prognostizierten Lebensdauer. Dieser Umstand wird auf drei Ursachen zurückgeführt (siehe [IRH] S. 364):

- Statistischer Größeneinfluss:
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine größere Anzahl von Fehlstellen – als Ausgangsort der Rissbildung – an der freien Oberfläche befinden, steigt mit der Größe derselben.
- Spannungsmechanischer Größeneinfluss:
Bei größeren Bauteilen unter Biege- oder Torsionsbeanspruchung fällt die Spannung ins Bauteilinnere hinein weniger stark ab als bei kleineren Komponenten. Der Spannungsgradient ist geringer, was direkt zu einer Vergrößerung des hochbeanspruchten Werkstoffvolumens führt.
- Technologischer Größeneinfluss:
Bei der Herstellung der Bauteile treten fertigungsbedingte Besonderheiten auf (z. B. Erstarrungsvorgänge beim Gießen, Abkühlvorgänge beim Wärmebehandeln), die größenabhängige Werkstoffzustände (z. B. Gefügeausbildung) zur Folge haben.

In den Regelwerken zur Berechnung werden diese Effekte durch Abminderungsfaktoren der zulässigen Spannungen berücksichtigt.

2.1.7.3 Weitere Einflüsse

Als weitere Einflüsse auf die Ermüdungsfestigkeit sind vor allem die Temperatur, Korrosionseffekte und Eigenspannungen durch den Herstellprozess zu nennen.

Bei höheren Temperaturen (bei Stählen ab 100°C) nimmt die Festigkeit ab, bei tiefen Temperaturen nimmt vor allem die Sprödigkeit zu, was ebenfalls eine Herabsetzung der Ermüdungsfestigkeit zur Folge hat. Die folgende Darstellung der Biegewechselfestigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur zeigt das Verhalten unterschiedlicher Werkstoffe.

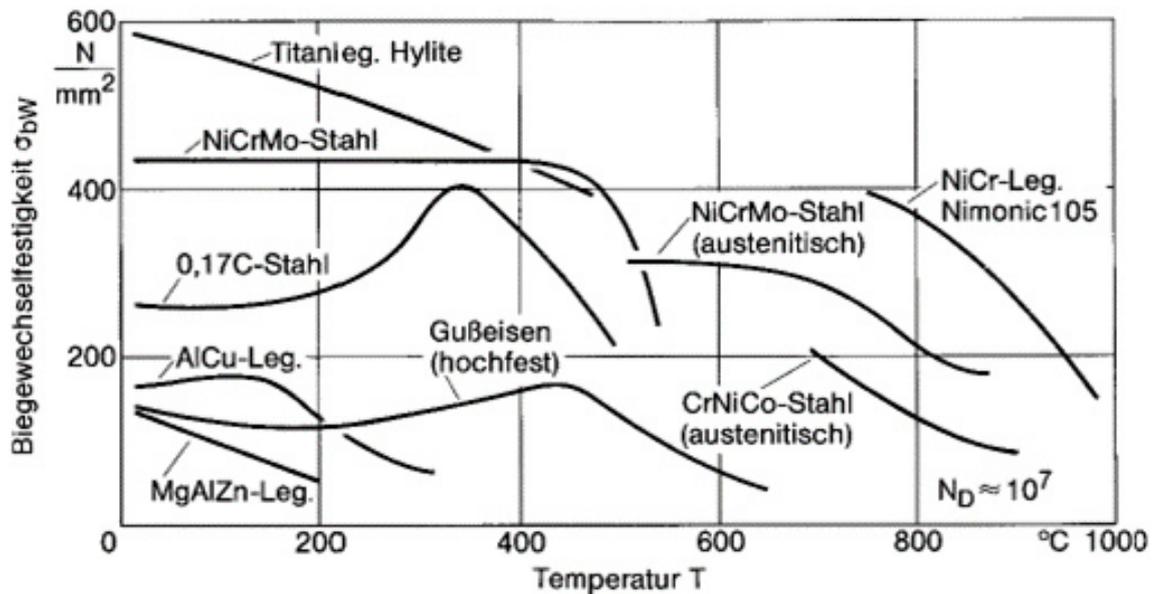


Abbildung 15: Dauerfestigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur / Quelle: [RVE]

Dem festigkeitsmindernden Einfluss von Korrosion muss besondere Beachtung geschenkt werden. Durch eine korrosive Umgebung kann möglicherweise keine Dauerfestigkeit vorhanden sein, sondern ein von der Einsatzdauer abhängiges, zeitfestes Verhalten vorliegen. Wurde bisher davon ausgegangen, dass lediglich die Anzahl der Lastwechsel von Bedeutung ist, muss dies hinsichtlich der Korrosionszeitfestigkeit revidiert werden. Die Belastungsfrequenz spielt hier eine erhebliche Rolle, da die Verweildauer im korrosiven Medium maßgebend ist. (Eine ausführliche Diskussion ist in [RVE] ab S. 128 enthalten.)

Eigenspannungen treten vor allem bei geschweißten Komponenten als Zugeigenspannungen auf. Bei den Referenzwöhlerlinien der jeweiligen Schweißdetails ist die festigkeitsmindernde Wirkung bereits implizit enthalten. Durch geeignete Maßnahmen wie Kugelstrahlen, Rütteln oder Spannungsarmglühen können die Eigenspannungen abgesenkt werden, was wiederum durch Bonusfaktoren in der Berechnung berücksichtigt wird. Sind jedoch Druckeigenspannungen an der Oberfläche vorhanden, so bedeutet dies eine festigkeitssteigernde Wirkung. Durch Festwalzen oder Rollieren kann auf mechanischem Wege, durch Nitrieren oder Härten auf chemisch-thermischem Wege, eine Erhöhung der Dauerfestigkeit erreicht werden. Richtwerte für Bonusfaktoren sind z. B. in der FKM-Richtlinie ([FKM] Tabelle 4.3.7) enthalten.

2.1.8 Kerbwirkung

„Im Sinne der Festigkeitslehre versteht man unter Kerben Störstellen für den Kraftfluß.“ (Definition aus [IRH] S. 212). In der Regel sind diese Störstellen Änderungen der inneren oder äußeren Bauteilkontur wie z. B. Nuten, Bohrungen oder einfach Querschnittsübergänge die eine Spannungskonzentration zur Folge haben. In diesem Fall spricht man von Formkerben. Des Weiteren können jedoch auch Fügestellen (z. B. Schweißnähte), Bearbeitungsriefen oder Fehlstellen im Material Kerben darstellen, diese werden als Werkstoffkerben bezeichnet. Belastungskerbene können durch örtlich konzentrierte Lasteinleitung – wie dies z. B. bei Hertzscher Pressung der Fall ist – entstehen. Durch die Berücksichtigung der Kerbwirkung gelangt man von der Materialfestigkeit zur Gestaltfestigkeit (siehe Abbildung 5).

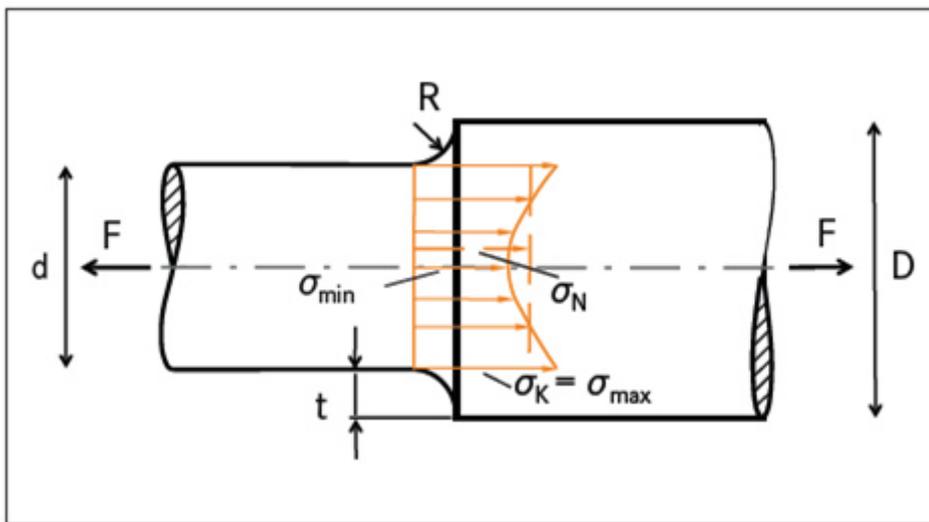


Abbildung 16: Spannungsverlauf am Wellenabsatz / Quelle: [RSH]

Kerben bewirken eine Erhöhung der Spannung in Bezug auf die im betrachteten Querschnitt wirkende Nennspannung. Das Verhältnis zwischen der Kerbspannung σ_k zur Nennspannung σ_n wird durch die Kerbformzahl K_t (oft auch mit α_k bezeichnet) ausgedrückt.

$$K_t = \frac{\sigma_k}{\sigma_n}$$

(15)

Der Bezug auf die Nennspannung setzt die Definition eines Nennquerschnitts voraus! Bei der Verwendung von Formzahldiagrammen oder Gleichungen aus unterschiedlichen Quellen ist es daher besonders wichtig, Kenntnis über den zugrundeliegenden Nennquerschnitt zu erlangen. Die Berechnung der Nennspannung erfolgt in vielen Fällen analytisch oder auch unter Anwendung numerischer Verfahren. Zur Ermittlung der Kerbspannung wurden für typische Problemstellungen, wie Absätze an Achsen oder Bohrungen in Flachstäben, analytische Rechenmodelle entwickelt und zur einfacheren Handhabung

Formzahldiagramme erstellt. Solche Diagramme sind in vielen Regelwerken (wie z. B. der FKM Richtlinie [FKM] Kap.5.2) enthalten.

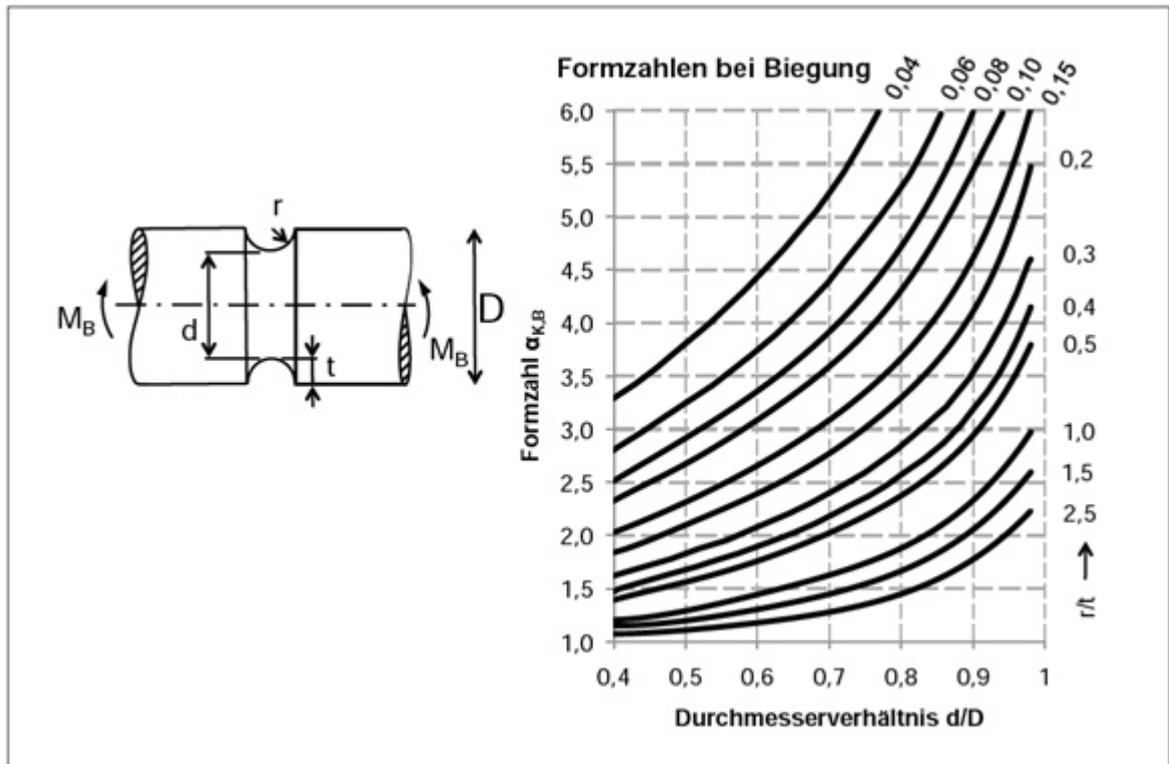


Abbildung 17: Formzahlen für gekerbte Rundstäbe bei Biegung / Quelle: [RSH]

In vielen praktischen Fällen ist jedoch die Definition eines Bezugsquerschnitts nicht möglich. Die Ermittlung der örtlichen Spannungen hingegen kann durch numerische Rechenmethoden wie der Finiten Elemente Methode oder der Boundary Element Methode sowie durch experimentelle Verfahren mit optischen Methoden oder der direkten Dehnungsmessung ermittelt werden. Die Festigkeitsberechnung wird dann direkt mit diesen Spannungswerten durchgeführt.

Hinsichtlich der Schwingfestigkeit läge die Vermutung nahe, dass der Wöhler-Versuch einer gekerbten Probe (Index g) und einer ungekerbten Probe (Index u) bei denen die maximalen Spannungsamplituden gleich sind – also $\sigma_{k,g} = \sigma_{n,u}$ – zu einer identischen Schwingspielanzahl führen wird. Dies ist jedoch nicht der Fall! Die gekerbte Probe wird in den meisten Fällen eine höhere Anzahl an Schwingspielen ertragen was durch experimentelle Befunde bestätigt wird ([IRH] S. 374).

Um nun diesen Effekt in der Berechnung zu erfassen, wird die sogenannte Kerbwirkungszahl K_f (oft auch mit β_k bezeichnet), als Verhältnis der Amplituden der Dauerfestigkeit der ungekerbten zur gekerbten Probe definiert.

$$K_f = \frac{\sigma_{D,u}}{\sigma_{D,g}}$$

(16)

Als Erklärung für diesen Effekt führen Radaj und Vormwald die sogenannte Mikrostützwirkung an ([RVE] S. 189). *“Dem Konzept der Mikrostützwirkung liegt daher die Vorstellung zugrunde, daß nicht die Kerbhöchstspannung die Dauerfestigkeit bestimmt, sondern die über ein elementares Werkstoffteilchen im Kerbgrund gemittelte Spannung oder auch die Kerbspannung unterhalb dieses Werkstoffteilchens. ... Das Konzept der Mikrostützwirkung reicht allerdings nicht aus, die Kerbwirkungsminderung oberhalb der technischen Dauerfestigkeit ($N_D \geq 10^6$) zu begründen, hier sind plastische Verformung und Rißfortschritt erklärend hinzuzuziehen.“*

Die Kerbwirkungszahl ist streng genommen nur für die Dauerfestigkeit gültig, wird jedoch auch für den Zeitfestigkeitsbereich übernommen. Im Bereich der Kurzzeitfestigkeit nähert sich die Kerbwirkungszahl jedoch dem Wert eins, was gleichbedeutend mit der identischen statischen Festigkeit der beiden Proben ist.

$$1 \leq K_f \leq K_t \quad (17)$$

Ein weit verbreiteter Ansatz zur Ermittlung der Kerbwirkungszahl geht auf Siebel zurück und wird in mehreren deutschen Regelwerken zur Festigkeitsberechnung verwendet ([RVE] S. 191; [IRH] S. 378).

$$K_f = \frac{K_t}{n_\chi} \quad (18)$$

Die spannungsmechanische Stützziffer n_χ hängt dabei vom Werkstoff und vom (bezogenen) Spannungsgefälle im Kerbgrund χ ab (siehe Abbildung 18). Ist kein Nennquerschnitt und somit keine Nennspannung bekannt, so kann aus dem Spannungsgefälle eine Formzahl einer Ersatzstruktur berechnet werden ([FKM] S. 89). Auf diesem Weg kann nun auch die Kerbwirkungszahl für Bereiche in denen kein Nennquerschnitt definiert werden kann, basierend auf FEM Resultaten, berechnet werden.

Neben dem beschriebenen Stielerschen Stützwirkungskonzept gibt es noch das Konzept der Werkstoffmechanischen Stützzahl ([FKM] S. 91), den Spannungsmittelungsansatz ([RVE] S. 197) oder den Spannungsabstandsansatz ([RVE] S. 202), um die Kerbwirkungszahl zu berechnen.

Die Negierung des Kerbspannungseffektes - durch die direkte Verwendung der Formzahl zur Berechnung der Beanspruchung ohne Berücksichtigung der Kerbwirkungszahl - kann eine Bemessung „auf der sicheren Seite“ bedeuten. Bei scharfen Kerben führt diese Vorgehensweise jedoch zu einer unwirtschaftlichen Überdimensionierung, sodass bei der detaillierten Ermüdungsfestigkeitsanalyse die Kerbwirkung sehr wohl berücksichtigt wird.

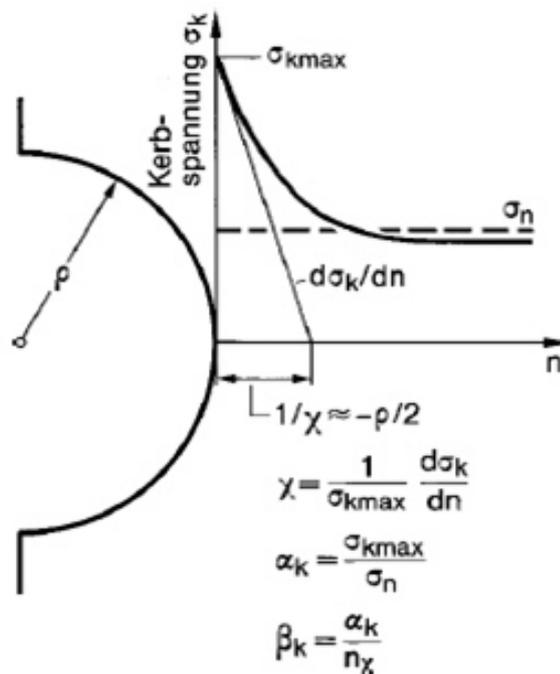


Abbildung 18: Bezogenes Spannungsgefälle / Quelle: [RVE]

2.2 Beschreibung der Belastung/Beanspruchung

Die der Betriebsfestigkeitsberechnung zugrundeliegende Beanspruchungs-Zeit-Funktion wird in der Regel durch Messungen bestimmt oder durch die Definition eines Beanspruchungskollektivs festgelegt.

Ein Stufenkollektiv wird durch die Angabe der jeweiligen Zyklenzahl N_i zu einer Mittelspannung σ_m und dazugehöriger Amplitude σ_a definiert. Es kann jedoch auch auf typische Standardkollektive zurückgegriffen werden, die auf einer statistischen Verteilung oder einer charakteristischen Form beruhen (siehe Abbildung 19).

Liegt hingegen eine gemessene regellose Belastung vor, kommen Zählverfahren zur Anwendung, um den gesamten Charakter (hinsichtlich der Auswirkung auf die Ermüdungsfestigkeit) der Funktion zu erfassen. Neben dem im Folgenden beschriebenen Rainflow-Verfahren - dieses hat sich in der Anwendungspraxis durchgesetzt - werden auch das Spannenpaar-, das Spitzenwert- oder das Klassendurchgangsverfahren verwendet (siehe [RVE] S. 267)

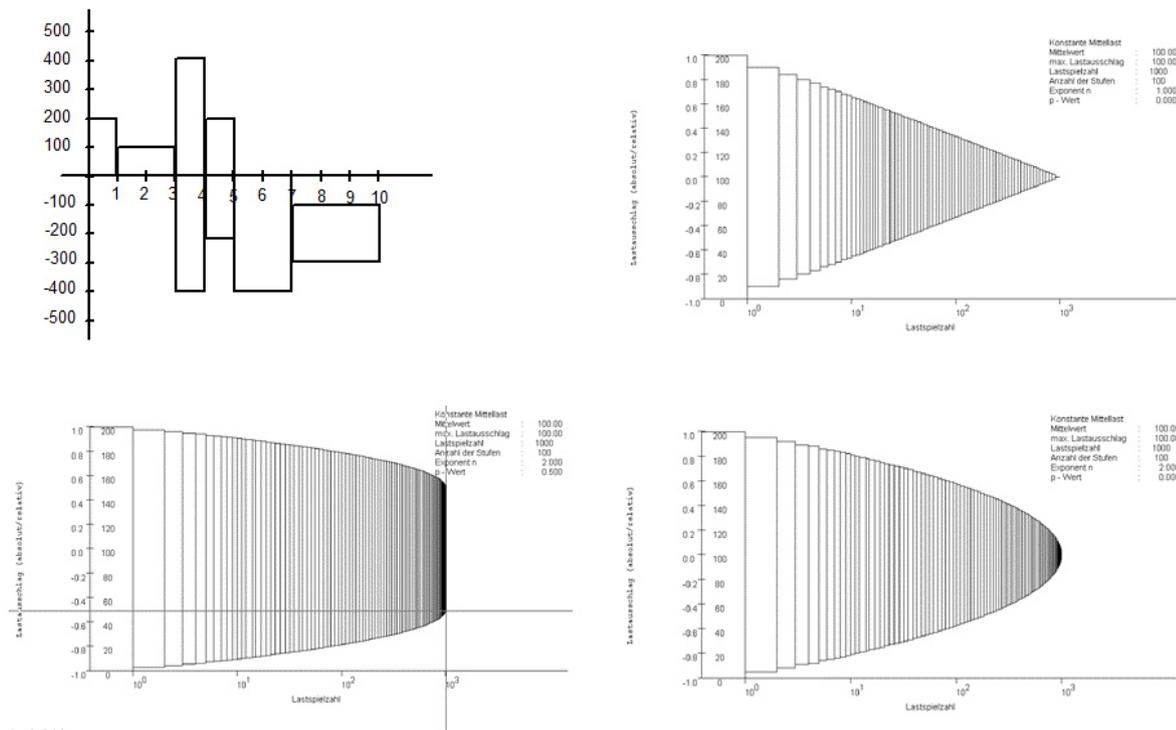


Abbildung 19: Stufen- und Standardkollektive der Beanspruchung / Quelle: [WL2]

2.2.1 Rainflow-Verfahren

Die Datenmenge der gemessenen Beanspruchungs-Zeit-Funktionen kann einen erheblichen Umfang einnehmen, sodass eine Datenreduktion für die Berechnung erfolgen muss. Das Rainflow-Verfahren zählt nur die für die Schädigung relevanten Anteile der Funktion und stellt diese in einer Matrix dar. Das Ergebnis dieser Zählung entspricht den geschlossenen Hystereseschleifen im Spannungs-Dehnungs-Pfad des Materials (siehe Abbildung 25). Diese werkstoffmechanisch begründete Interpretation kann durch eine Erklärung der Funktion des Verfahrens ergänzt werden. Es wird aus einem stochastischen Signal eine Menge an schädigungsgleichen Schwingspielen – jeweils beschrieben durch Amplitude, Mittelwert und Anzahl – ermittelt. Der Messbereich wird dabei in Bereiche – die sogenannten Klassen – unterteilt. Nun werden die geschlossenen Schleifen des auf die Umkehrpunktfolge vereinfachten Signals gezählt. Die Zuordnung in der Matrix erfolgt nach der Richtung der Schleife als von Klasse „Start“ zu Klasse „Ziel“.

Bei einer Rainflow-Zählung eines gemessenen Signals wird es naturgemäß nicht möglich sein, alle offenen Schleifen zu schließen. Diese offenen Schleifen werden Residuen genannt und haben sehr oft einen nicht unerheblichen Anteil an der tatsächlichen Schädigung. Die Berücksichtigung der Residuen sollte bei der Analyse in Betracht gezogen werden.

Der Ablauf des Rainflow-Verfahrens wird nachstehend dargestellt.

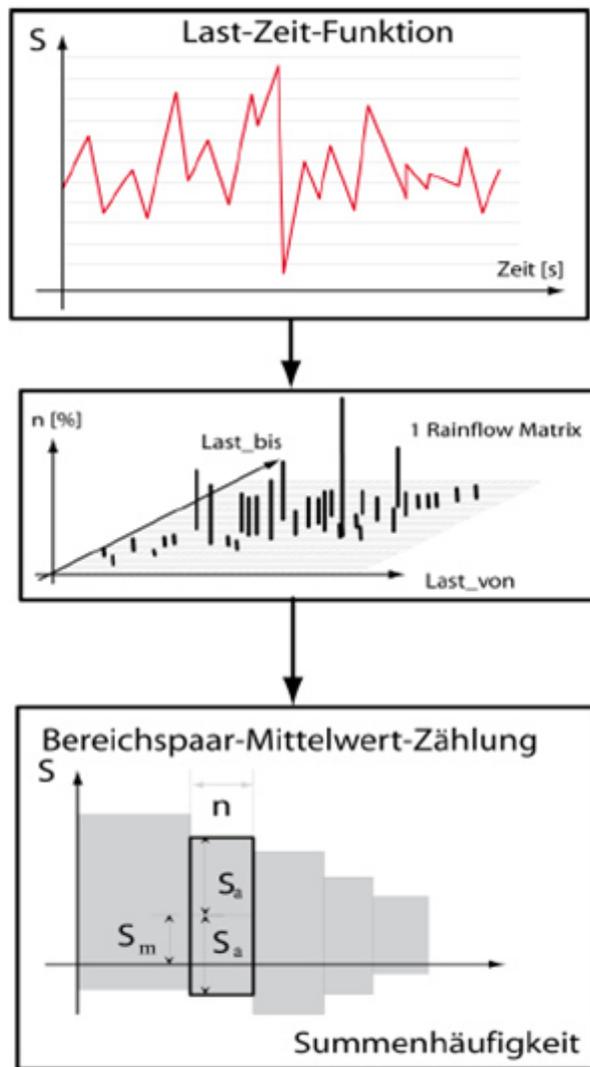


Abbildung 20: Ablauf des Rainflow-Verfahrens / Quelle: [WL1]

Eine anschauliche Erklärung des Verfahrensablaufs ist in [WL2] sowie [HAB] und [RVE] enthalten.

2.3 Schadensakkumulation

Die einfachste Form der Schädigungsrechnung ist die lineare Schädigungsakkumulationshypothese nach Palmgren und Miner (kurz als „Miner-Regel“ bezeichnet). Basierend auf einem treppenförmigen Kollektiv wird für jede Kollektivstufe der Schädigungsanteil berechnet. Dieser ist als das Verhältnis der vorhandenen Schwingspiele n_i zu der (aus der Wöhlerlinie ermittelten) Anzahl der zulässigen Schwingspiele N_i für die jeweilige Spannungsamplitude definiert.

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (19)$$

Die Schädigung des gesamten Belastungskollektivs ist die Summe aller Einzelschädigungen.

$$D = \sum_i D_i \quad (20)$$

Bauteilversagen (basierend auf der zugrundeliegenden Ausfallwahrscheinlichkeit der Wöhlerlinie) tritt ein, wenn die Schadensumme den Wert $D = 1$ erreicht. Basierend auf Versuchsergebnissen wurden Varianten der Miner-Regel entwickelt, die sich vor allem in der Art und Weise der Berücksichtigung der Dauerfestigkeit unterscheiden.

Die originale Form der Miner-Regel berücksichtigt die Dauerfestigkeit in der Art, dass jede Amplitude kleiner als σ_D keinen schädigenden Anteil hat. Dies wurde jedoch durch Versuche nicht bestätigt.

Die elementare Form der Miner-Regel ignoriert die Dauerfestigkeit, die Wöhlerlinie wird einfach bis zum Schnittpunkt mit der Abszisse⁹ verlängert. Jede Amplitudenstufe im Belastungskollektiv hat eine schädigende Wirkung. Dieser Ansatz überschätzt jedoch den tatsächlichen Schädigungsanteil kleiner Amplituden.

Die modifizierte Form nach Haibach berücksichtigt diesen Umstand durch eine geänderte Neigung der Wöhlerlinie für Amplituden unterhalb der Dauerfestigkeit. ([HAB] S. 289)

$$N = N_A \cdot \left(\frac{S_a}{S_D}\right)^{-k} \quad \text{für } S_a \geq S_D$$

$$N = N_A \cdot \left(\frac{S_a}{S_D}\right)^{-(2k-1)} \quad \text{für } S_a < S_D \quad (21)$$

⁹ horizontale Achse eines rechtshändig-kartesischen Koordinatensystems

Die Modifikation nach Liu/Zenner nimmt eine Änderung der Wöhlerlinie - basierend auf dem Kollektivhöchstwert - vor, bei einer zusätzlichen Halbierung der Dauerfestigkeit ([RVE] S. 300). Die Beschreibung der Wöhlerlinie lautet dann:

$$N_{max} = N_A \cdot \left(\frac{S_a}{S_D}\right)^{-k} \quad \text{für } S_a = S_{a,max}$$

$$N = N_{max} \cdot \left(\frac{S_a}{S_{max}}\right)^{\frac{k+m}{2}} \quad \text{für } S_a < S_{a,max} \text{ mit } m = 3,6$$

(22)

Die graphische Gegenüberstellung der Varianten zeigt Abbildung 21.

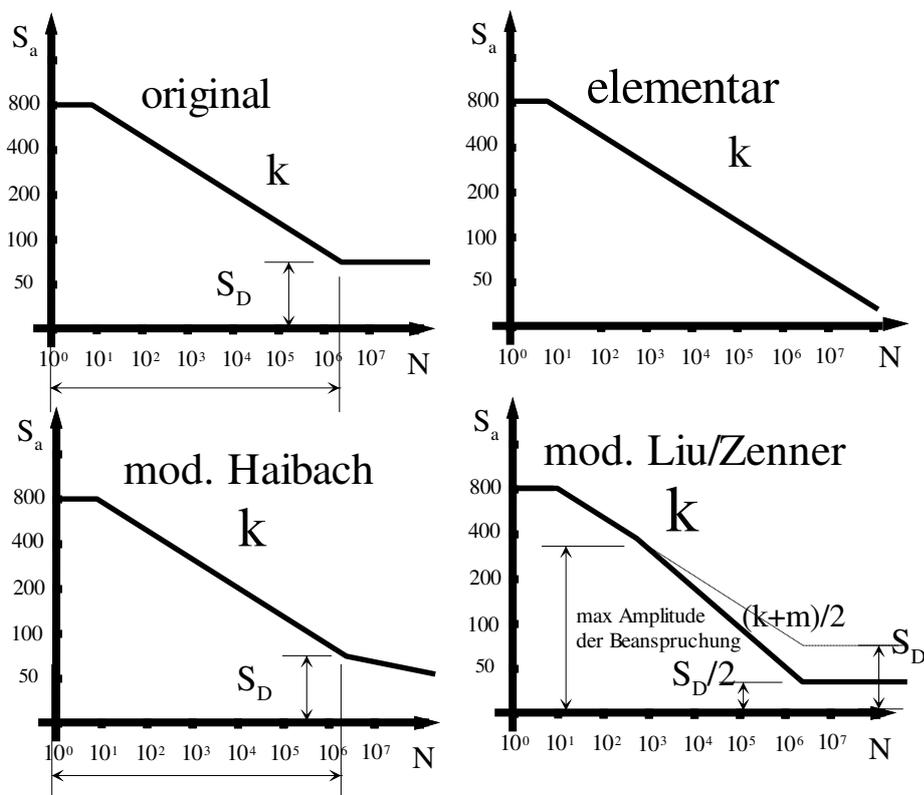


Abbildung 21: Varianten der Wöhlerlinien / Quelle: [WL2]

Eine weitere Variante der Schadensakkumulation ist die sogenannte relative Miner-Regel. In manchen Fällen zeigt der Vergleich der rechnerisch prognostizierten Schädigung eine große Abweichung zu der in Bauteilversuchen ermittelten Lebensdauer, die teilweise deutlich darunter lag ([RVE] S. 297). Um diesen Umstand zu berücksichtigen, führt man die einfache Regel ein, dass in diesen Fällen als zulässige Schadenssumme ein Wert $D < 1$ verwendet wird. Die FKM Richtlinie macht diese „ertragbare Minersumme“ von dem Abstand der Knickpunktzyklenzahl der Wöhlerlinie zu der der Lebensdauerlinie abhängig und berücksichtigt somit die Form des Beanspruchungskollektivs ([FKM] S. 104). Die Werte sind nach unten hin begrenzt.

2.4 Nachweiskonzepte

Je nach Art und Weise, wie die Beanspruchung im Bauteil - ausgedrückt durch Spannungen oder Dehnungen - ermittelt wurde, kann die Ermüdungsfestigkeitsberechnung nach unterschiedlichen Konzepten erfolgen. Die Dauer und Höhe der Beanspruchung - also die Entscheidung ob eine Kurzzeit- oder Langzeitfestigkeitsanalyse erforderlich ist - wird ebenfalls bei der Wahl des Konzepts eine Rolle spielen.

Die spannungsbasierenden Konzepte werden ob der einfacheren Anwendbarkeit und der Vielzahl der darauf aufbauenden Berechnungsvorschriften in der Praxis bevorzugt eingesetzt, verlieren jedoch im Bereich der Kurzzeitfestigkeit an Genauigkeit. Hier werden dehnungsbasierende Konzepte verwendet, die die werkstoffmechanischen Vorgänge besser erfassen.

Eine anschauliche Darstellung der Nachweiskonzepte bezogen auf die Lastspielzahl und der damit korrespondierenden Rissausbildung - für eine betrachtete Aufgabenstellung - wurde [RVE] S. 550 entnommen und ist in Abbildung 22 dargestellt.

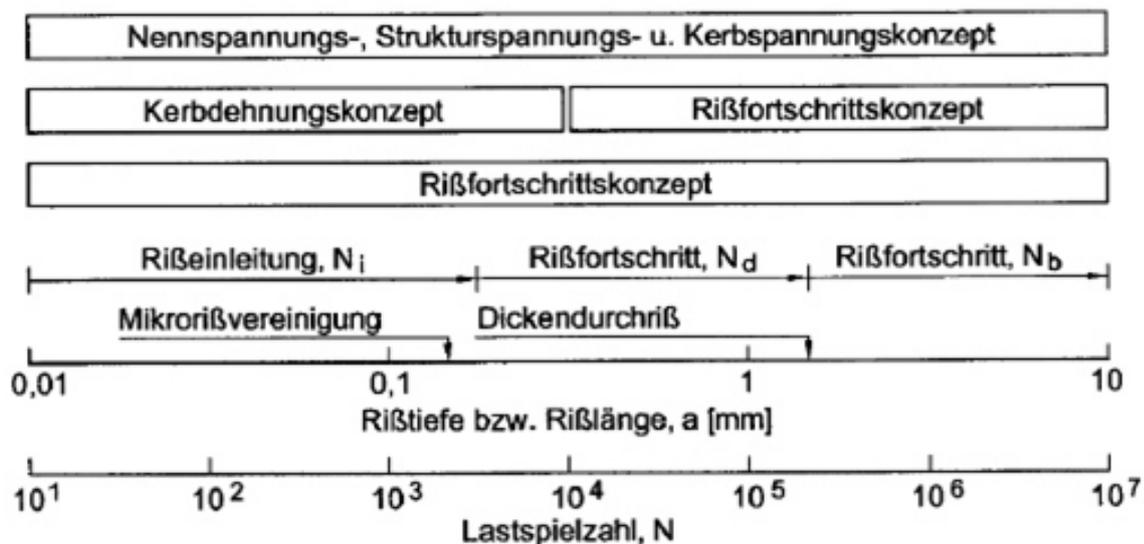


Abbildung 22: Nachweiskonzepte, Rissgröße und Lastspielzahlen / Quelle: [RVE]

Eine wesentliche Erkenntnis, die vor allem bei dem Vergleich von Berechnungsergebnissen der gleichen Problemstellung nach unterschiedlichen Konzepten beachtet werden muss, ist der Umstand, dass die spannungsbasierenden Konzepte als Schadenskriterium den Bruch des Bauteils oder zumindest einen signifikanten, mit freiem Auge erkennbaren, Riss verwenden. Die dehnungsbasierenden Konzepte hingegen definieren als Schadenskriterium den Anriss, der - abhängig von der jeweiligen Situation - bereits deutlich vor dem Bruch eintreten kann. Das offensichtliche Risswachstum schließt hier an und endet mit dem Bruch des Bauteils.

2.4.1 Spannungsbasierende Analyse

Der Ursprung der Lebensdauerberechnung liegt in der spannungsbasierenden Analyse, welche die am meisten eingesetzte Methode ist.

2.4.1.1 Nennspannungskonzept

Voraussetzung für die Anwendung des Nennspannungskonzepts ist die Definition eines Nennquerschnitts, sowie die fundierte Ermittlung einer Kerbformzahl. Diese vermeintlich einfachen Aufgaben können in der Praxis jedoch zu erheblichen Schwierigkeiten bei der Umsetzung führen. In vielen Regelwerken des Maschinen- und Stahlbaus sind sogenannte Formzahlkataloge enthalten, die für ausgewählte Kerbdetails zur Ermittlung der Formzahl herangezogen werden. Bei der Anwendung ist besonders auf den Gültigkeitsbereich der zugrundeliegenden Gleichungen zu achten.

Als Bezug für die Lebensdaueranalyse werden Nennspannungswöhlerlinien verwendet, die statistisch abgesichert sein müssen. Diese umfassen den Einfluss von Geometrie, Oberfläche und etwaig vorhandenen Eigenspannungen. Die Beanspruchung ergibt sich aus dem Kollektiv der Nennspannungsamplituden, das aus dem Belastungskollektiv und der zu definierenden versagenskritischen Querschnittsfläche abgeleitet wird. Durch die Schädigungsrechnung nach der linearen Schadensakkumulationshypothese wird die prognostizierte Lebensdauer bis zum Bruch bzw. die Schadenssumme durch das Belastungskollektiv ermittelt.

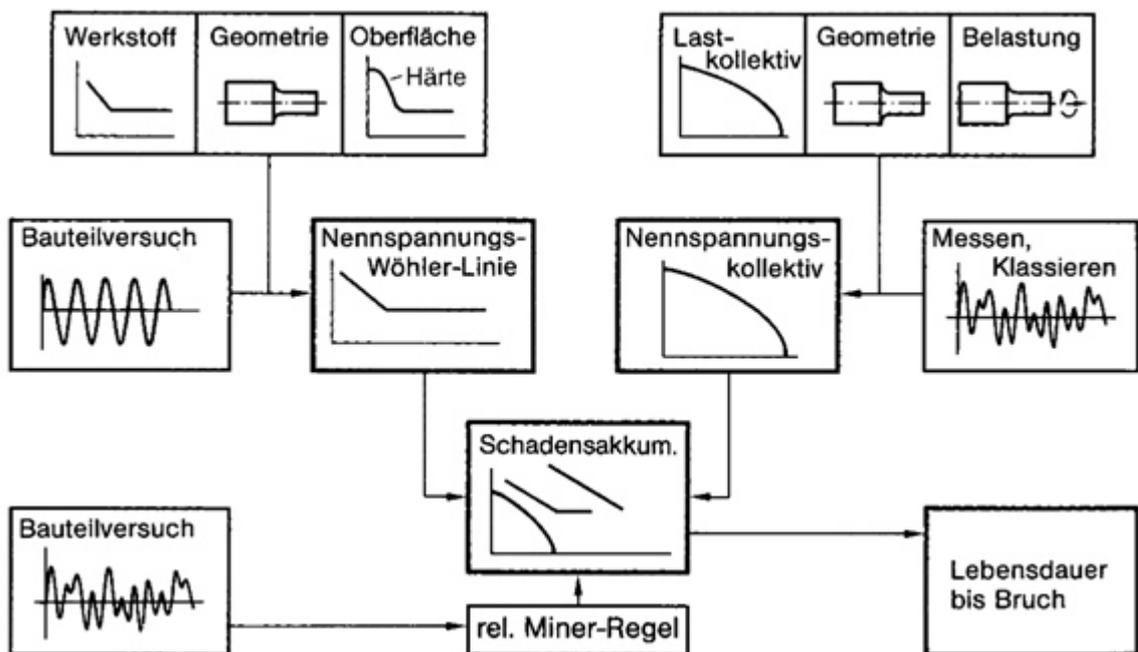


Abbildung 23: Ablaufschema Nennspannungskonzept / Quelle: [RVE]

2.4.1.2 Kerbspannungskonzept

Liegen Spannungsergebnisse aus FEM oder BEM Analysen vor – im heutigen Entwicklungsprozess hat sich vor allem die Finite Elemente Methode als Werkzeug stark etabliert – oder Dehnungswerte aus DMS Messungen, dann kommt die Kerbspannungsmethode bevorzugt zum Einsatz. Bei der Ermittlung der Spannungen mittels FEM muss jedoch unbedingt die Konvergenz des Spannungsergebnisses, sprich die Genauigkeit desselben, untersucht werden. Durch eine unzureichende Diskretisierung der zu berechnenden Struktur können die FEM Resultate stark von den tatsächlichen Werten abweichen was sich überproportional in der daraus abgeleiteten Lebensdauer widerspiegelt.

Im Gegensatz zum Nennspannungskonzept wird hier die Wöhlerlinie der Werkstoff-Normprobe als Referenz verwendet. Das Vorgehen ähnelt dem des Nennspannungskonzepts und wird daher in der Praxis häufig eingesetzt. Vorsicht ist jedoch geboten, wenn die als linear-elastisch angenommene Kerbgrundspannung eine Größenordnung annimmt, die eine Wechselplastifizierung des Materials bedeuten würde! In diesem Fall ist die Analyse mit lokalen Dehnungen zu bevorzugen.

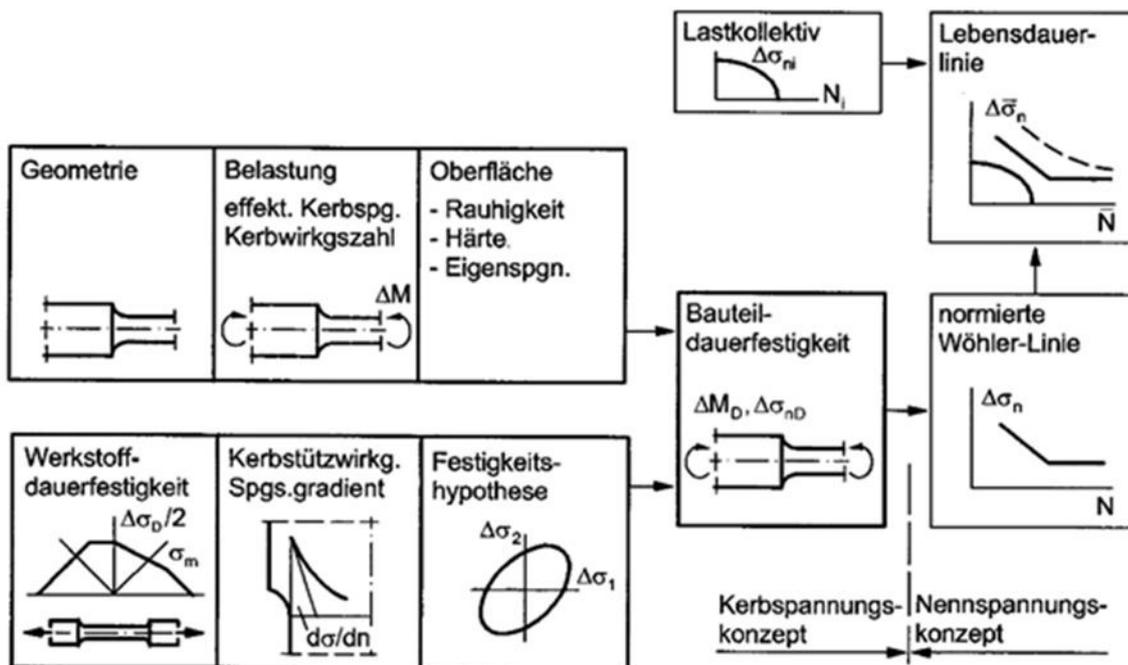


Abbildung 24: Ablaufschema Kerbspannungskonzept / Quelle: [RVE]

2.4.1.3 Strukturspannungskonzept

Bei der FEM Analyse großer Strukturen ist es sehr oft nicht möglich bzw. wirtschaftlich, für jedes zu untersuchende Detail konvergente Spannungsergebnisse zu liefern. Durch Beschränkungen in der Anzahl der Freiheitsgrade müssten für diesen Fall eine Vielzahl von Submodellen erstellt werden, was einen erheblichen Zeitaufwand bedeuten würde. Die Bewertung wird hier mit nicht-spannungskonvergenten Ergebnissen, den sogenannten

Strukturspannungen durchgeführt. Vor allem bei Schweißverbindungen ist dies der Fall (hier wird die Methode als Hot-Spot-Stress Konzept bezeichnet). Strukturspannungen werden oft auch als lokale Nennspannungen bezeichnet.

Durch Extrapolations- oder Linearisierungsmethoden werden die Spannungen an den zu untersuchenden Stellen ermittelt. Der formale Ablauf gleicht ansonsten dem des Nennspannungskonzepts. Der Unterschied liegt jedoch darin, dass lokale Effekte in den Spannungen sehr wohl berücksichtigt werden und somit auch Details analysiert werden können, die nicht zu 100% auf ein katalogisiertes Nennspannungsdetail zutreffen. Die Anzahl der Kerbfälle des Wöhlerlinien-Katalogs reduziert sich dadurch erheblich.

Bei der Anwendung besteht jedoch die Problematik, dass das FEM Modell nach festgelegten Vernetzungskriterien erstellt werden muss, um eine normkonforme Bewertung zu gewährleisten, was wiederum sehr oft mit einem nicht unerheblichen Aufwand verbunden ist. Die Submodelltechnik kann auch hier zur Verbesserung der Ergebnislänge eingesetzt werden. Eine ausführliche Diskussion des Strukturspannungskonzepts ist in den DVS-Berichten Band 256 [DVS] enthalten, das Konzept kommt unter anderem auch in der FKM-Richtlinie [FKM] zur Anwendung.

2.4.2 Analyse mit lokalen Dehnungen

Das Kerbdehnungskonzept (auch örtliches Konzept genannt) findet vor allem im Bereich der Kurzzeitfestigkeit (engl. Low Cycle Fatigue) seine Anwendung, vor allem dann, wenn das Spannungsniveau deutlich über der Fließgrenze liegt, und somit Wechselplastifizierungen im Werkstoff auftreten. Als Referenz für die Schädigungsrechnung werden nun Dehnungswöhlerlinien bzw. Schädigungsparameterwöhlerlinien verwendet. Deren Ermittlung stellt höhere Anforderungen an die Prüftechnik durch das Erfordernis der Dehnungskontrolle beim Versuch.

Der Grundgedanke des örtlichen Konzepts liegt darin, dass das lokale Geschehen in der Kerbe durch ein Werkstoffmodell beschrieben wird, das die zyklischen Phänomene zwischen Spannung und Dehnung beschreibt. Durch das Plastifizieren besteht hier ein nicht-linearer Zusammenhang. Die Umkehrpunkte im Kraft-Dehnungs-Pfad und im Spannungs-Dehnungs-Pfad weisen die gleichen Dehnungswerte auf. Die Rainflow-Zählung ist deshalb geeignet, um aus dieser einen Spannungs-Dehnungs-Pfad zu rekonstruieren. Abbildung 25 zeigt diesen Zusammenhang.

Als Basis für die Beschreibung der Hysteresekurven wird die stabilisierte zyklische Spannungs-Dehnungskurve nach Ramberg-Osgood verwendet, die neben dem elastischen auch den plastischen Dehnungsanteil berücksichtigt. Die zugehörige Gleichung lautet:

$$\varepsilon_{a,t} = \varepsilon_{a,e} + \varepsilon_{a,p} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (23)$$

Die elastische Dehnungsamplitude wird über das Hooksche Gesetz, mit dem E-Modul E berechnet. Für die plastische Dehnungsamplitude wird die Konstante \dot{K} und der zyklische Verfestigungsexponent \dot{n} benötigt.

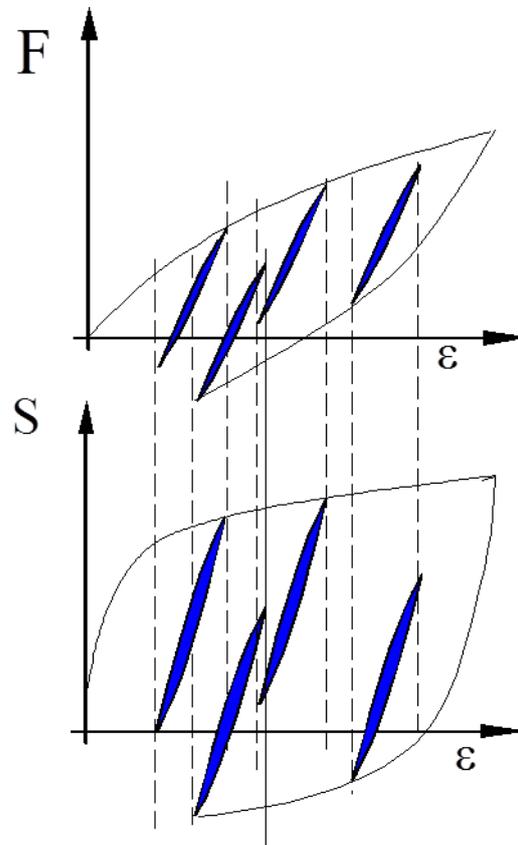


Abbildung 25: Kraft-Dehnungs- und Spannungs-Dehnungs-Pfad / Quelle: [WL2]

Die Dehnungswöhlerlinie lässt sich durch die Manson-Coffin Gleichung beschreiben:

$$\varepsilon_{a,t} = \varepsilon_{a,e} + \varepsilon_{a,p} = \frac{\sigma'_f}{E} \cdot (2N)^b + \dot{\varepsilon}_f \cdot (2N)^c \quad (24)$$

Mit den Zusammenhängen:

$$\dot{n} = \frac{b}{c} \quad (25)$$

$$\dot{K} = \sigma'_f \cdot \dot{\varepsilon}_f^{-\dot{n}} \quad (26)$$

Der Einfluss einer von Null verschiedenen Mitteldehnung oder Mittelspannung wird über den Schädigungsparameter nach Smith Watson und Topper erfasst.

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma_o \cdot \varepsilon_{a,t} \cdot E} \quad (27)$$

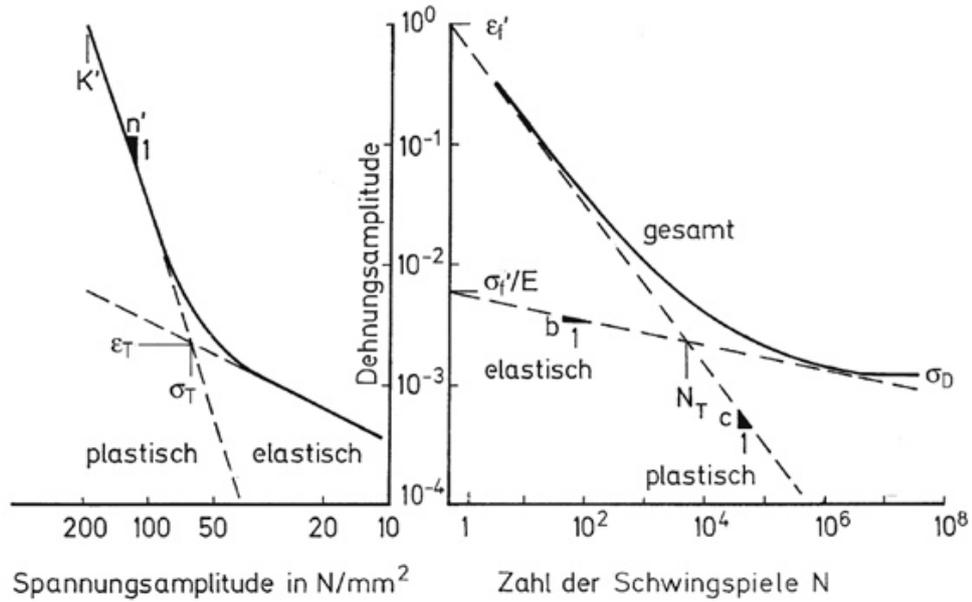


Abbildung 26: Dehnungs-Wöhlerlinie und zugehörige Bezeichnungen / Quelle: [HAB]

Die Kerbgrundbeanspruchung kann aus Nennspannungen und Formzahlen berechnet werden, wobei hier die Neuber-Korrektur der Spannungen angewandt wird (siehe [HAB] S. 358). Alternativ dazu kann auch mit gemessenen oder direkt aus elasto-plastischen FEM Analysen gewonnenen Werten gerechnet werden.

Der Ablauf der Analyse erfolgt entsprechend dem Schema in Abbildung 27.

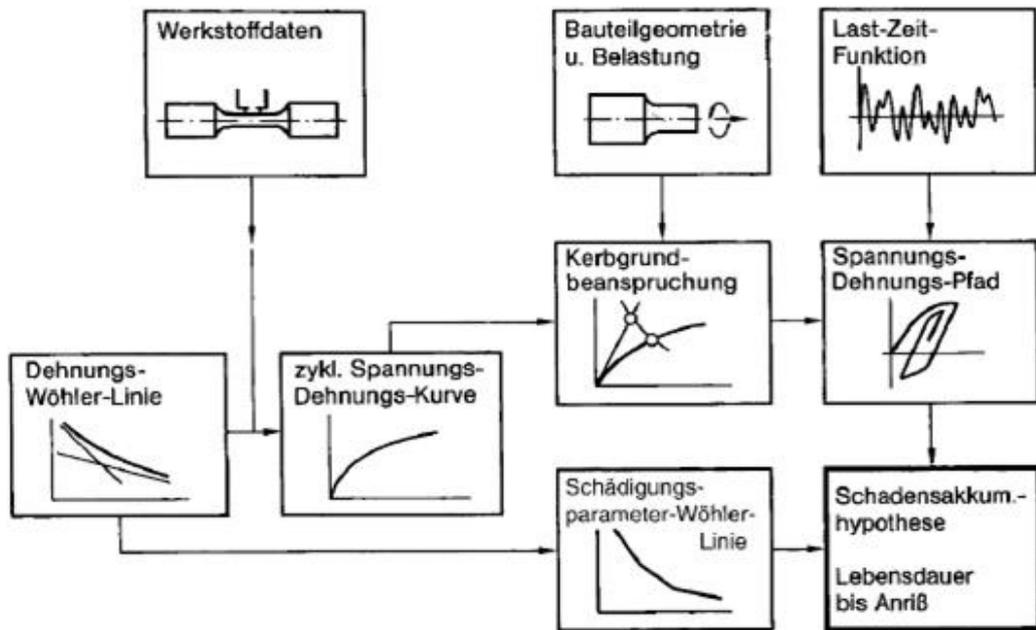


Abbildung 27: Ablaufschema Kerbdehnungskonzept / Quelle: [RVE]

Für die Ermittlung der Materialparameter für eine Analyse sind umfangreiche Versuche erforderlich. Im Vergleich zu den spannungsbasierenden Konzepten sind relativ wenig Werkstoffdaten allgemein verfügbar. Ein Ansatz ist jedoch, basierend auf dem sogenannten „Uniform Material Law“, die Materialparameter zu bestimmen (siehe [HAB] S. 348).

Eine detaillierte Diskussion des Berechnungsverfahrens ist in den Werken von Haibach [HAB], Radaj und Vormwald [RVE], Bishop und Sherrat [BSF] sowie dem winLIFE Handbuch [WL1] enthalten.

2.4.3 Rissfortschrittskonzept

Die Berechnungsmethoden der Rissfortschrittsrechnung werden im Bereich der Schadensanalyse sowie in Situationen, in denen ein stabiles Risswachstum während der Einsatzdauer eines Bauteils zugelassen wird, eingesetzt.

Basierend auf der Spannungsintensität an der Risspitze und dem zugrundeliegenden Beanspruchungsmodus wird das Wachstum des Risses berechnet. Die Gesamtlebensdauer ergibt sich aus der Schwingspielzahl bis zum Anriss und der danach folgenden Dauer des Risswachstums bis zur kritischen Endrissgröße.

Aufgrund der Komplexität der Thematik wird in dieser Einführung in die Lebensdauer auf eine detaillierte Beschreibung verzichtet. Ausführliche Erläuterungen zu diesem Thema sind in [BSF], [HAB] und [RVE] enthalten.

2.5 Der Beanspruchungszustand

In der vorangegangenen Diskussion wurde von einem einachsigen Spannungs- bzw. Dehnungszustand ausgegangen, da dieser auch bei der Ermittlung der Materialdaten im Schwingfestigkeitsversuch vorliegt. Unter realen Belastungsverhältnissen treten jedoch im Regelfall mehrachsige Spannungszustände auf. Abhängig von der jeweiligen Ursache können die Spannungskomponenten zueinander proportional oder auch nicht-proportional sein, was den Aufwand zur Berechnung erheblich beeinflusst. Der Spannungszustand lässt sich in die drei Kategorien Uniaxial (einachsig), Biaxial (mehrachsig, proportional) und Multiaxial (mehrachsig, nicht-proportional) einteilen.

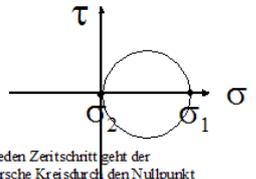
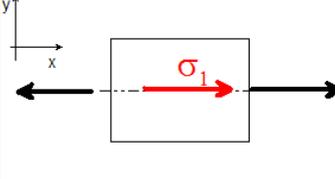
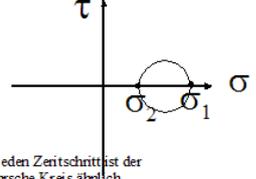
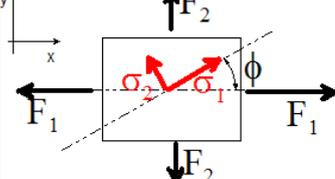
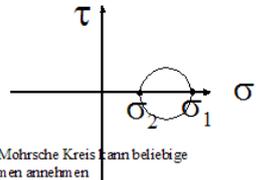
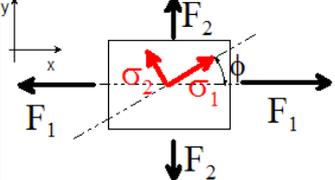
Fall	ϕ	σ_1	σ_2	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	Mohrscher Kreis	Struktur
uniaxial Hauptspannungsrichtung fällt mit Wirkungslinie der Belastung zusammen	=0	variabel	=0	=0	 <p>für jeden Zeitschritt geht der Mohrsche Kreis durch den Nullpunkt</p>	
biaxial Proportionale Belastung mehrere Belastungsgrößen wirken proportional in unterschiedlichsten Richtungen	const	variabel	variabel	const $-1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq 1$	 <p>für jeden Zeitschritt ist der Mohrsche Kreis ähnlich</p>	
multiaxial nicht-proportionale Belastung mehrere Belastungsgrößen wirken unabhängig voneinander in unterschiedlichsten Richtungen	variabel	variabel	variabel	variabel	 <p>der Mohrsche Kreis kann beliebige Formen annehmen</p>	

Abbildung 28: Unterscheidung der Beanspruchungsarten / Quelle: [WL2]

2.5.1 Uniaxial

Die wesentlichen Merkmale der drei Kategorien werden in Abbildung 28 für den ebenen Spannungszustand gezeigt. Im uniaxialen Fall bleibt die Richtung der Hauptnormalspannung konstant.

2.5.2 Biaxial

Der biaxiale Fall wird dadurch gekennzeichnet, dass der Winkel der ersten Hauptnormalspannung (ϕ) ebenso wie das Hauptspannungsverhältnis ($\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$) konstant bleiben. Bei der Darstellung der Mohrschen Kreise bleibt dieser immer geometrisch ähnlich. Für die Schädigungsrechnung wird aus den Komponenten des Spannungstensors eine Vergleichsspannung berechnet, die beim Vergleich mit der Wöhlerlinie zu einer der einachsigen Beanspruchung äquivalenten Schädigung führt. Ähnlich dem Vorgehen bei statischer Beanspruchung werden die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH¹⁰), die Normalspannungshypothese (NH) und die Schubspannungshypothese (SH¹¹) zur Bildung der Ver-

¹⁰ Die GEH wird nach ihrem Begründer auch als v. Mises Hypothese bezeichnet.

¹¹ Die SH wird nach ihrem Begründer auch als Tresca Hypothese bezeichnet.

gleichsspannung verwendet. Für den ebenen Spannungszustand (ESZ)¹² errechnen sich die Vergleichsspannungen wie folgt:

$$\sigma_{v,GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (28)$$

$$\sigma_{v,NH} = \sigma_1 \quad (29)$$

$$\sigma_{v,SH} = 2 * \tau_{max} = |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (30)$$

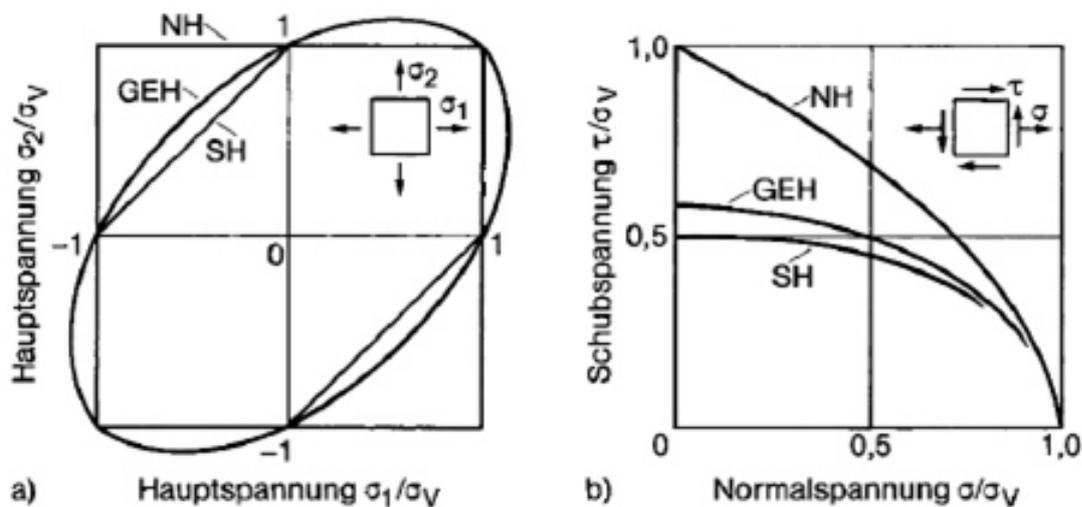


Abbildung 29: Vergleich der Festigkeitshypothesen (ESZ) / Quelle: [RVE]

Die GEH und die SH werden für duktile Werkstoffe verwendet. Die NH hingegen kommt bei spröden Materialien zum Einsatz. Um den Mittelspannungseinfluss bei der Analyse zu berücksichtigen, werden Verfahrensvarianten der GEH und der NH angewandt.

$$\sigma_{v,GEHvz} = \text{sign}(\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)) \cdot \sigma_{v,GEH} \quad (31)$$

$$\sigma_{v,NHvz} = \text{sign}(\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)) \cdot \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (32)$$

Die GEH mit dem Vorzeichen der betragsmäßig größten Hauptnormalspannung kann verwendet werden, wenn der Spannungszustand durch die erste Hauptnormalspannung dominiert wird. Liegt hingegen ein Schubzustand vor - die Hauptspannungskomponenten

¹² Ein ESZ liegt an der freien, unbelasteten Oberfläche eines Bauteils vor. Die Gleichungen für den räumlichen (dreiaxigen) Spannungszustand - wie dieser z. B. bei druckbeanspruchten Oberflächen vorliegt - sind in [IRH] Kap.7 ersichtlich.

haben in diesem Fall annähernd den gleichen Betrag, jedoch unterschiedliche Vorzeichen - kann diese Hypothese zu falschen Ergebnissen führen. Die NH mit der betragsmäßig größten Spannung berücksichtigt ebenso den Mittelspannungseinfluss, wobei auch hier Vorsicht geboten ist! Es ist nicht auszuschließen, dass eine betragsmäßig kleinere Zugspannung zu einer höheren Schädigung führt als eine Druckspannung größeren Betrags.

2.5.3 Multiaxial

Im multiaxialen Fall sind sowohl der Hauptspannungswinkel als auch die Hauptspannungsrichtung variabel. Man spricht auch von drehenden Hauptspannungen mit variablen Amplituden. Die Lage der Mohrschen Kreise ist nun veränderlich, ebenso wie deren Größe. Ursache für diesen Beanspruchungsfall sind asynchron oder regellos auf das Bauteil wirkende Belastungen mit möglicherweise unterschiedlicher Frequenz. Während im biaxialen Fall die Ebene der Schädigung - abhängig von der Vergleichsspannungshypothese - im Vorhinein bekannt ist, so kann diese nun nicht vorhergesagt werden.

2.5.3.1 Das Verfahren der kritischen Schnittebene

Um die Ebene mit der maximalen Schädigung zu bestimmen, wird der ebene Spannungszustand (ESZ) für eine definierte Anzahl an Schnittebenen - üblich sind hier zwischen acht und zwanzig Stück - für jeden Punkt der Belastungsfolge berechnet und die Schadensumme in jeder Ebene ermittelt. Die Ebene mit der größten Schädigung wird als kritische Schnittebene bezeichnet. Im Fall eines räumlichen Spannungszustandes (RSZ) erhöht sich der Rechenaufwand immens, da zusätzlich eine weitere Dimension der Schnittebenen eingeführt werden muss. Dieses Vorgehen ist bei der Verfahrensvariante nach Findley möglich ([WL1] S. 381).

Es existiert eine Vielzahl von Vergleichsspannungshypothesen für den multiaxialen Fall, die sich in der Berücksichtigung der Normal- und Schubspannung in der Schnittebene unterscheiden. Es lässt sich ein allgemeiner Ansatz der Vergleichsspannung formulieren, aus dem sich durch die geeignete Wahl der Parameter alle verwendeten Hypothesen ableiten lassen:

$$\sigma_v = [c \cdot \text{sign}(\sigma_\varphi) + d \cdot \text{sign}(\tau_\varphi)] \cdot \sqrt{a \cdot \sigma_\varphi^2 + b \cdot \left(\frac{\sigma_w}{\tau_w}\right)^2 \cdot \tau_\varphi^2} \quad (33)$$

$\left(\frac{\sigma_w}{\tau_w}\right)$ ist das Verhältnis der Zug-Druck- zur Schubwechselfestigkeit und somit eine reine Werkstoffeigenschaft. Die Normal- und Schubspannungskomponente beziehen sich auf die jeweils betrachtete Schnittebene. Die Auswirkung der Parameter a, b, c und d ist in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Vergleichsspannungshypothesen für den multiaxialen Fall / Quelle: [WL2]

Hypothese	Bemerkung	a	b	c	d
Normalspannungs Hypothese $\sigma_V = \sigma_\varphi$	Unproblematisch bei sprödem Werkstoff	1	0	1	0
Schubspannungs Hypothese $\sigma_V = \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W}\right) * \tau_\varphi$	Unproblematisch bei zähem Werkstoff	0	1	0	1
Mod. GE-Hypothese (Vor. aus Normalspg.) $\sigma_V = \text{sign}(\sigma_\varphi) \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W}\right)^2 * \tau_\varphi^2}$	Plausibilität der Vergleichs- spannung prüfen	1	1	1	0
Mod. GE-Hypothese (Vor. Aus Schubspannung) $\sigma_V = \text{sign}(\tau_\varphi) \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W}\right)^2 * \tau_\varphi^2}$	Plausibilität der Vergleichs= spannung prüfen	1	1	0	1
Mod. GE-Hypothese (Vor. aus betragsgrößter Spannungskomponente)	Plausibilität der Vergleichs= spannung prüfen	1	1	1	1

Aus den Bemerkungen in Tabelle 1 ist ersichtlich, dass die Anwendung der jeweiligen Hypothesen in manchen Fällen - je nach Art des Beanspruchungsverlaufs - nicht unproblematisch ist. Die Anwendbarkeit der Hypothesen ist im Anwendungsfall zu prüfen (siehe [WL1] und [WL2]).

Die Probleme der vorangehend angeführten Hypothesen werden bei dem Verfahren der Normalspannungsmodifikation des Spannungstensors (STM) vermieden. Dieses von Gaier und Dannbauer [GAI] entwickelte Verfahren beruht auf der von Gough vorgeschlagenen Ellipsengleichung für die kombinierte Beanspruchung aus Normalspannung und Schubspannung ([RVE] S. 74). Die Vergleichsspannung $\sigma_{v,STM}$ wird durch die Multiplikation der Normalspannung σ_n mit einem Faktor f gebildet. Dieser wird wie folgt bestimmt:

$$f = 1 + \left[1 - \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W}\right)\right] \cdot V$$

(34)

Dieser Faktor wird durch das Verhältnis der Hauptnormalspannungen V beeinflusst.

$$V = \frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} \quad \text{für } |\sigma_I| > |\sigma_{III}|$$

$$V = \frac{\sigma_I}{\sigma_{III}} \quad \text{für } |\sigma_{III}| > |\sigma_I|$$
(35)

Das Verhältnis der Zug-Druck- zur Schubwechselfestigkeit $\left(\frac{\sigma_w}{\tau_w}\right)$ wird für spröde Werkstoffe gleich Eins gesetzt, für duktile Materialien zwischen 1,7 und 2.

Für die Vergleichsspannung gilt dann:

$$\sigma_{v,STM} = \sigma_n \cdot f$$
(36)

Eine weitere Hypothese ist die nach Findley ([RVE] S. 75), bei der ein Schadensparameter nach folgender Gleichung definiert wird:

$$f = \left(\frac{\Delta\tau}{2} + k \cdot \sigma_n \right)$$
(37)

k ist eine Materialkonstante, die die Wichtung der Normalspannung festlegt. Im Fall von $k = 0$ entspricht der Schädigungsparameter der Schubspannungshypothese. Die Materialkonstante kann aus der Mittelspannungsempfindlichkeit oder aus dem Verhältnis der Schub- zur Zug-Druck-Wechselfestigkeit bestimmt werden. Die kritische Schnittebene wird bei diesem Verfahren in Abhängigkeit der Schwingweite der Schubspannung und der Normalspannung innerhalb eines Schwingspiels bestimmt. Die Hypothese nach Findley beschränkt sich nicht auf den ebenen Spannungszustand, sondern ermöglicht auch die Berechnung von Schnittebenen im Raum. Der Rechenaufwand steigt dabei jedoch zur dritten Potenz.

Für das örtliche Konzept wird das multiaxiale Verfahren nach Mroz eingesetzt. Details dazu sind in [WL1] S. 387 und [HAB] S. 367 u. S. 417 enthalten.

3 Lebensdaueranalyse mit winLIFE

Die Software winLIFE des Herstellers Steinbeis Transferzentrum - Neue Technologien in der Verkehrstechnik ermöglicht dem Anwender Lebensdaueranalysen am Stand der Technik mit den im Kapitel 2 beschriebenen und weiteren Verfahren. Wöhlerliniengeneratoren basierend auf unterschiedlichen Berechnungsvorschriften sowie eine umfangreiche Bibliothek bilden die Grundlage für eine normkonforme Bewertung.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, die Möglichkeit der Verwendung von generalisierten (modalen) Spannungen aus Superelementen mit dem zugehörigen Verlauf der generalisierten Koordinaten in winLIFE zu untersuchen und somit die Grundlage für eine vollständige Implementierung dieser Methode in die Software zu schaffen.

3.1 Ablauf einer winLIFE Analyse

Die folgende Prozessbeschreibung einer winLIFE Analyse erfolgt für den (allgemeinen) Fall einer multiaxialen Analyse (MUX) basierend auf FEM Ergebnissen.

3.1.1 Superposition von statischen Einheitslastfällen

Die Methode der Superposition von Einheitslastfällen findet eine breite Anwendung im Bereich der statischen Analysen. Für den Fall des Vorliegens eines vollständig linearen Berechnungsmodells, bei dem eine Vielzahl von Lastkombinationen untersucht werden soll, genügt es, die Einheitslastfälle der Einzellasten zu berechnen und die resultierenden Spannungszustände zu überlagern. In vielen Branchen ist diese Vorgehensweise üblich und auch in den entsprechenden Regelwerken verankert. Als Beispiel sei hier der Schienenfahrzeugbau genannt (EN 12663-1 [N2]).

Auch im Bereich der Ermüdungsfestigkeitsanalysen kann dieses Vorgehen angewandt werden. Dafür ist das Vorliegen einer Last-Zeit-Folge für jeden Einheitslastfall erforderlich. Für jeden zu analysierenden Knoten der FEM-Struktur liegt der vollständige Spannungstensor für jeden Einheitslastfall vor. Durch die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen weist der Spannungstensor eine symmetrische Form auf.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

(38)

Zur vollständigen Beschreibung des Spannungstensors sind somit 6 Größen erforderlich. Eine ausführliche Herleitung des Spannungstensors zeigen Kienzler und Schröder in [KSF] Kap.2.

Aus der Superposition der Einheitslastfälle folgt ein Spannungstensor-Zeitverlauf für jeden Knoten. Die Schädigungsrechnung wird nun für jede der definierten Schnittebenen durchgeführt, um die kritische Schnittebene (mit der größten Schädigung) zu bestimmen (siehe Kapitel 2.5.3.1). Das Ablaufschema einer Berechnung ist in Abbildung 30 dargestellt.

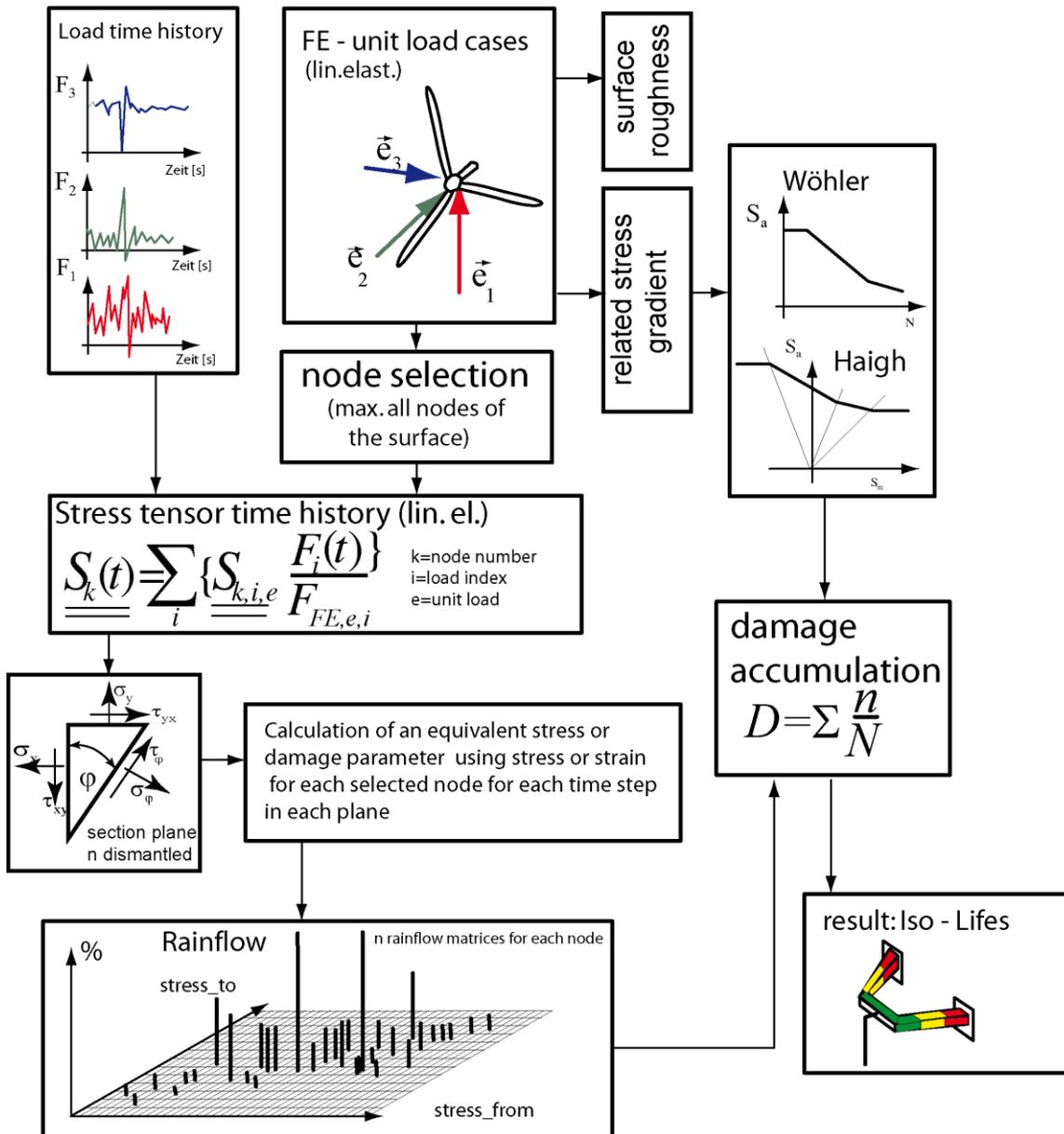


Abbildung 30: Ablaufschema der multiaxialen Analyse mit Superposition / Quelle: [WL2]

Die Superposition von Einheitslastfällen besteht im Vergleich zu dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Verfahren der nichtlinearen Analyse durch eine minimale Datengröße.

Das beschriebene Vorgehen ist jedoch nur für lineare Modelle anwendbar. Sobald nichtlineare Effekte - wie z. B. Kontakt zwischen den Bauteilen - oder auch dynamische Effekte auftreten, kann das Verfahren nicht mehr eingesetzt werden!

3.1.2 Nichtlineare Analyse

Liegt eine nichtlineare (dynamische) Problemstellung vor, so wird der Spannungstensor-Zeitverlauf für jeden Knoten als direktes Ergebnis der FEM oder MKS Simulation für die Lebensdaueranalyse verwendet. Hier sind bei der Analyse praktisch keine Einschränkungen in Bezug auf Kontaktbedingungen, große Deformationen sowie Dämpfungen und allgemeine dynamische Effekte vorhanden. Das Vorgehen bei der nichtlinearen Analyse zeigt Abbildung 31.

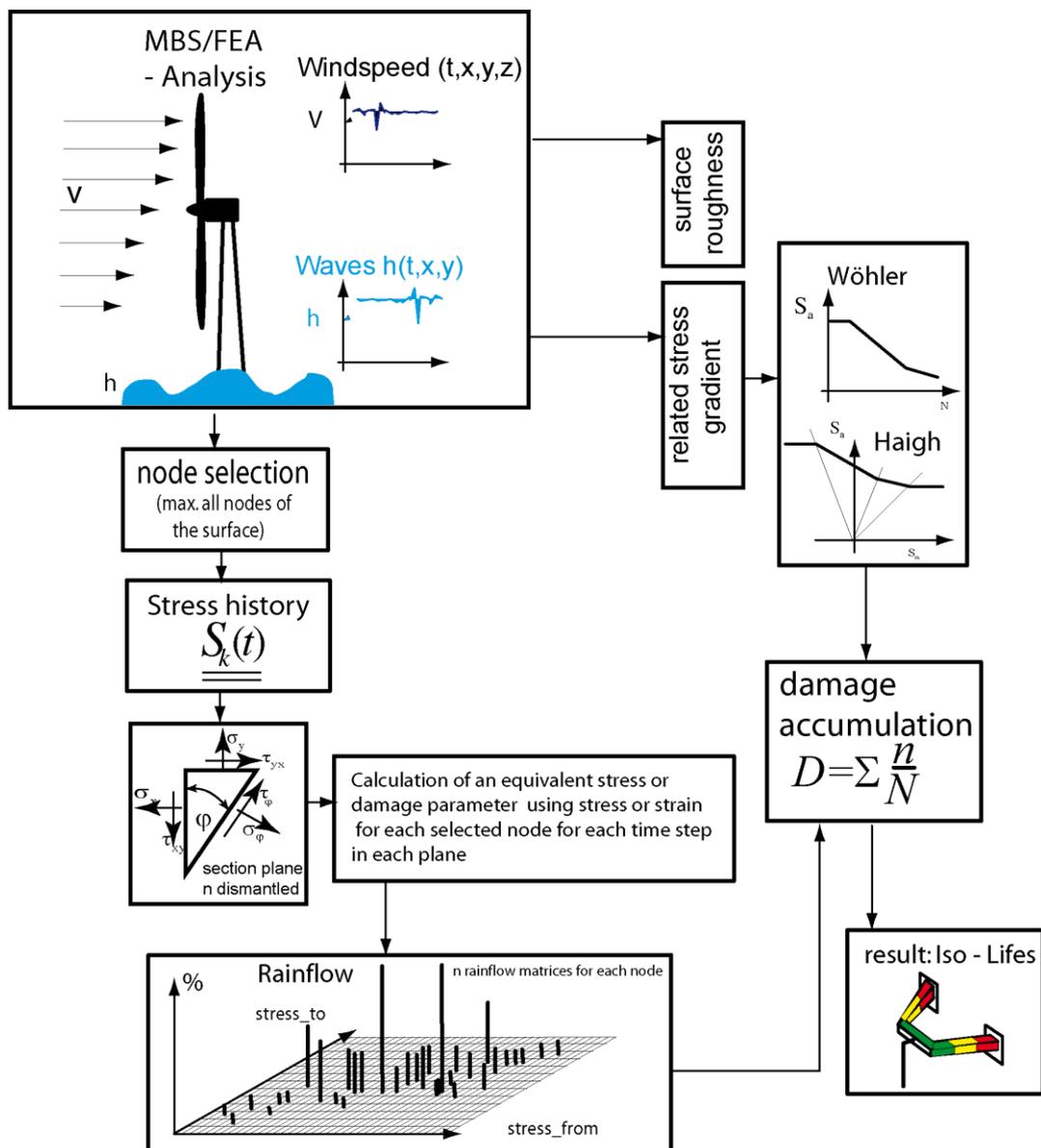


Abbildung 31: Ablaufschema der nichtlinearen multiaxialen Analyse / Quelle: [WL2]

Als großer Nachteil der nichtlinearen (dynamischen) Analyse ist die Menge der handzuhabenden Daten zu nennen. Eine Analyse für alle Knoten einer FEM Struktur wird daher im Regelfall hier nicht durchgeführt, stattdessen beschränkt man sich auf die (voraussichtlich) kritischen Knoten mit dem Risiko, nicht alle problematischen Stellen zu erfassen.

3.1.3 Superposition von modalen (dynamischen) Einheitslastfällen

Wird eine dynamische Analyse mit einem Wechsel der Basis - indem generalisierte (modale) Koordinaten eingeführt werden - des Gleichungssystems durchgeführt, dann folgt daraus, dass der Deformationszustand der gesamten Struktur durch eine Superposition der Eigenvektoren entsprechend dem Verlauf der zeitabhängigen generalisierten (modalen) Koordinaten gebildet wird. Selbiges gilt auch, wenn dieses Verfahren bei der Kondensation der Matrizen von Teilstrukturen eingesetzt wird. Man spricht in diesem Fall von Substrukturen oder Superelementen. Die Erläuterung dieser Verfahren ist Gegenstand von Kapitel 4.

Der formale Ablauf entspricht in diesem Fall exakt dem der statischen Superposition mit dem Unterschied, dass auf diesem Wege dynamische Effekte sehr wohl berücksichtigt werden können. Nichtlinearitäten im Gesamtsystem können berücksichtigt werden, so lange die Substrukturen selbst lineares Verhalten aufweisen.

Die Ausführungen in Kapitel 6 beschreiben die Vorgehensweise anhand des Anwendungsbeispiels einer Kurbelwelle eines Verbrennungsmotors und zeigen die Eignung des Verfahrens für dynamische Analysen.

4 Dynamische Analyse und Substrukturen

Dynamische Berechnungen stellen rechenintensive Aufgaben, im Vergleich zu statischen Analysen mit derselben Anzahl an Freiheitsgraden, dar. Seit der Einführung der Finite Elemente Methode ¹³- als ein Rechenmodell wenige Freiheitsgrade umfasste - bis heute - mit mehreren Millionen an Freiheitsgraden im Modell - führt dieser Umstand zu speziellen Lösungsansätzen bei der Lösung des Differentialgleichungssystems.

Die modale Analyse ist ein Verfahren, dass durch die Entkopplung der Gleichungen des Systems eine Verkürzung der Rechenzeit ermöglicht, was jedoch mit Einschränkungen - vor allem in der Formulierung der Dämpfung - verbunden ist. Durch eine Aufteilung des Gesamtsystems in Substrukturen - auch Superelemente genannt - und bereichsweiser Reduktion der Freiheitsgrade mit einer Transformationsvorschrift, kann ebenso eine Reduktion der Rechenzeit herbeigeführt werden. Abhängig vom Reduktionsverfahren und von der Wahl der im System verbleibenden Hauptfreiheitsgrade wird eine mehr oder weniger genaue Abbildung des Gesamtsystems ermöglicht. Es folgt eine Darstellung der unterschiedlichen Verfahren sowie die Diskussion der Vor- und Nachteile bei der dynamischen Analyse. Grundlagenuntersuchungen zu diesem Themengebiet wurden bereits im Zuge des vorgelagerten Forschungsmoduls [AFM] durchgeführt. Diese Arbeit sowie Basisliteratur der Dynamik (z. B. [DTM] oder [GHSW3]) können zur Einführung in das Themengebiet der dynamischen Analyse herangezogen werden.

4.1 Methoden der dynamischen Analyse

4.1.1 Die Eigenwertanalyse

Die Bewegungsgleichung eines schwingfähigen Systems nimmt in Matrizenschreibweise die folgende Form an:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}$$

(39)

¹³ Turner und Gough legten in den 1950er Jahren den Grundstein für die Formulierung der Finiten Elemente Methode. Einen Überblick über die Entwicklungshistorie gibt Klein [KFE] S. 2.

Dabei steht \mathbf{M} für die Massen-, \mathbf{D} für die Dämpfungs- und \mathbf{K} für die Steifigkeitsmatrix des Systems. Die Belastung wird durch den Kraftvektor \mathbf{f} aufgebracht und der Vektor \mathbf{u} umfasst die Freiheitsgrade des Systems.

Für die freie Schwingung des ungedämpften Systems lautet die Bewegungsgleichung in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (40)$$

Dies führt zu dem Matrizeigenwertproblem:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (41)$$

Neben der trivialen Lösung $\hat{u}_1 \dots \hat{u}_n = 0$ hat das GLS nur dann eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet.

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (42)$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die n Eigenwerte λ bestimmen. Aus den Eigenwerten folgen die Eigenkreisfrequenzen ω und schließlich die Eigenfrequenzen f_o .

$$f_o = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \quad (43)$$

Zu jedem Eigenwert (auch Mode genannt) existiert ein Eigenvektor \mathbf{v} , der die Modalkoeffizienten jedes Freiheitsgrads - also die Schwingform - zum jeweiligen Mode umfasst. Diese können als Spaltenvektor einer Matrix \mathbf{V} dargestellt werden.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \quad (44)$$

Um eindeutige Werte zu erhalten, werden die Eigenvektoren normiert, sodass jeder Eigenvektor zum Einheitsvektor wird:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\mathbf{v}_1|} & \frac{1}{|\mathbf{v}_2|} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{v_{n1}}{|\mathbf{v}_1|} & \frac{v_{n2}}{|\mathbf{v}_2|} \end{bmatrix} = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \quad (45)$$

4.1.2 Direkte Analyse des Differentialgleichungssystems

Zur direkten Lösung muss das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung auf ein System erster Ordnung umgewandelt werden. Dies wird durch das Einführen neuer Koordinaten, den Ableitungen der ursprünglichen Koordinaten, gelöst. (Dabei steht i für den Zählindex der originalen Matrixelemente und n für die Dimension dieser Matrizen).

$$z_i = u_i \quad z_{i+n} = \frac{du_i}{dt} \quad (46)$$

Dadurch wird das Gleichungssystem der Dimension $n \times n$ auf die Größe $2n \times 2n$ erweitert und hat nun die allgemeine Form:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{g} \quad (47)$$

Die Matrix \mathbf{A} wird dabei aus folgenden Submatrizen gebildet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) & -(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Die Einheitsmatrix \mathbf{I} ist eine Diagonalmatrix, bei der jedes Diagonalelement den Wert Eins aufweist. Die Nullmatrix $\mathbf{0}$ ist eine Matrix mit allen Elementen gleich Null. Für die Lösung dieses Differentialgleichungssystems lässt sich unter Anwendung des Faltungssatzes – auch Duhamel-Integral genannt – anschreiben:

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{z}(\mathbf{t})_h + \mathbf{z}(\mathbf{t})_p = \mathbf{z}_0 \cdot e^{\mathbf{A} \cdot t} + \int_0^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \mathbf{h}(\tau) d\tau \quad (49)$$

Der Index \mathbf{h} steht dabei für die homogene, der Index \mathbf{p} für die partikuläre Lösung.

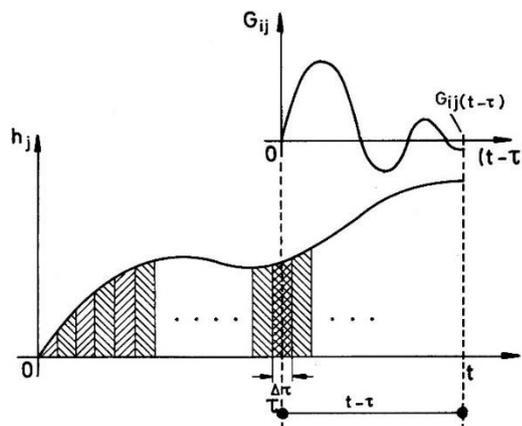


Abbildung 32: Darstellung zum Faltungssatz / Quelle: [WKM]

Der Faltungssatz stellt die Summe der Einzelantworten auf eine in Einzelimpulse zerlegte Erregerfunktion dar. Die analytische Lösung dieser Gleichung ist mit einigem Aufwand verbunden, wie auch Klein anmerkt: „Das gefundene Integral heißt allgemein Duhamel-Integral und kann vernünftig nur numerisch ausgewertet werden.“ ([KFE] S. 233)

Ein wesentlicher Nachteil der direkten Lösung ist die erforderliche Erweiterung der Matrixdimensionen, was direkt zu einer Erhöhung der Rechenzeit führt. Vorteilhaft ist hingegen die freie Wahl der Dämpfungscharakteristik. Im Gegensatz zur modalen Analyse sind hier keine Einschränkungen vorhanden.

4.1.3 Modale Analyse

Eine in vielen kommerziellen Finite Elemente Programmen verwendete Methode zur Verkürzung der Rechenzeit stellt die modale Analyse dar. Sie wird auch modale Superposition [ANS1] oder kurz Modenüberlagerung [BFE] genannt.

Die modale Analyse nutzt eine wichtige Eigenschaft – die Orthogonalität der Eigenvektoren¹⁴ – um das Differentialgleichungssystem zu entkoppeln. Es wird dabei ein Wechsel der Basis vorgenommen, indem die generalisierten Koordinaten \mathbf{q} eingeführt werden.

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{t}) \quad (50)$$

Als Transformationsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ wird dabei die Matrix der - mit der Einheitsmasse normierten - Eigenvektoren verwendet. Bei dieser Normierung wird ein Skalierfaktor g_i für jeden Eigenvektor \mathbf{v}_i bestimmt, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_i &= g_i \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i &= \bar{m} \end{aligned} \quad (51)$$

Als Einheitswert für die Masse \bar{m} wird z. B. 1kg gewählt. Die so bestimmten Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$ können wieder zur Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$ angeordnet werden.

Aus der Orthogonalität der Eigenvektoren folgt:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \bar{m} \mathbf{I} \quad (52)$$

¹⁴ Eine ausführliche Diskussion der Orthogonalität von Eigenvektoren führen Waller und Krings in [WKM] S. 203

Für die Steifigkeitsmatrix lässt sich anschreiben:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \bar{m}\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{m}\omega_2^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \bar{m}\omega_n^2 \end{bmatrix} = \bar{m} \text{diag}[\omega_i^2] = \bar{m} \boldsymbol{\omega}^2 \quad (53)$$

Die Bewegungsgleichung – unter Vernachlässigung der Dämpfung – lautet unter Verwendung der generalisierten Koordinaten:

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (54)$$

Durch die Vormultiplikation mit Φ^T erhält man:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (55)$$

Oder mit den Gleichungen (52) und (53):

$$\begin{aligned} \bar{m} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{m} \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q} &= \Phi^T \mathbf{f}(t) \\ \text{bzw.} \\ \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q} &= \frac{1}{\bar{m}} \Phi^T \mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(t) = \frac{1}{\bar{m}} \Phi^T \mathbf{f}(t) = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \cdots \quad \bar{F}_n]^T \quad (57)$$

Da $\boldsymbol{\omega}$ eine Diagonalmatrix ist, lässt sich auch schreiben:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 q_1 \\ \omega_2^2 q_2 \\ \vdots \\ \omega_n^2 q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1(t) \\ \bar{F}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{F}_n(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$

Oder auch für die i-te Eigenschwingung:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \bar{F}_i(t) \quad (59)$$

Bisher wurde die Dämpfung in der Bewegungsgleichung vernachlässigt. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten lässt sich die generalisierte Dämpfungsmatrix bilden.

$$\Delta = \frac{1}{\bar{m}} \Phi^T \mathbf{D} \Phi \quad (60)$$

Die Bewegungsgleichung in generalisierten Koordinaten lautet demnach:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}} + \omega^2 \mathbf{q} = \overline{\mathbf{f}(\mathbf{t})} \quad (61)$$

Eine Entkoppelung der Bewegungsgleichungen ist jedoch nur möglich, wenn die generalisierte Dämpfungsmatrix (60) Diagonalgestalt besitzt. Auch wenn in der Realität eine Kopplung vorhanden ist, wird diese vereinfachend weggelassen. Link [LFE] S. 264 bezeichnet dieses Vorgehen als „Bequemlichkeitshypothese“. Die n Gleichungen dieses Systems können isoliert betrachtet werden - es besteht kein Zusammenhang zwischen den einzelnen Eigenschwingungsformen - und entsprechend den Lösungsansätzen der Schwingungsdifferentialgleichung¹⁵ gelöst werden.

$$\ddot{q}_i + 2\delta\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \bar{F}_i(t) \quad (62)$$

Bei Gültigkeit der Bequemlichkeitshypothese spricht man auch von einem modal proportional gedämpften System. Der Begriff „proportional“ beruht auf der Proportionalität der Dämpfungsmatrix zur Massen- und Steifigkeitsmatrix. Dieser Ansatz wird auch als Raleigh-Dämpfung bezeichnet.

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (63)$$

Die generalisierte Dämpfungsmatrix (60) lautet damit:

$$\Delta = \alpha \mathbf{I} + \beta \omega^2 \quad (64)$$

Die Lösung der DGL setzt sich wieder aus dem homogenen und dem partikulären Anteil zusammen, wobei zur Berechnung noch folgende Hilfsgrößen benötigt werden:

$$\begin{aligned} \delta &= \text{diag} \left(\frac{\Delta_{ii}}{2} \right) & \mathbf{v} &= \text{diag} \left(\sqrt{\omega_{ii}^2 - \left(\frac{\Delta_{ii}}{2} \right)^2} \right) \\ \mathbf{EF}_t &= \text{diag} (e^{-\delta_{ii} t}) & \mathbf{SIN}_t &= \text{diag}(\sin(\mathbf{v}_{ii} t)) & \mathbf{COS}_t &= \text{diag}(\cos(\mathbf{v}_{ii} t)) \end{aligned} \quad (65)$$

¹⁵ Die Diskussion der Schwingungsdifferentialgleichung ist Bestandteil der grundlegenden Ingenieurausbildung und daher in allen Standardwerken der Dynamik enthalten. Wie z. B. bei Gross, Hauger, Schröder und Wall [GHSW3] S. 220. Das der Diplomarbeit vorgelagerte Forschungsmodul [AFM] kann ebenso zur Einführung in die Thematik herangezogen werden.

Die homogene Lösung, mit den Anfangsbedingungen \mathbf{u}_0 und \mathbf{v}_0 , lautet nun:

$$\mathbf{q}(\mathbf{t})_h = \frac{\mathbf{E}\mathbf{F}_t}{\bar{m}} \cdot [(\mathbf{C}\mathbf{O}\mathbf{S}_t + \delta \cdot \mathbf{v}^{-1} \cdot \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{N}_t) \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}^{-1} \cdot \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{N}_t \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_0] \quad (66)$$

Die partikuläre Lösung lässt sich wieder mit Hilfe des Faltungssatzes anschreiben:

$$\mathbf{q}(\mathbf{t})_p = \frac{\mathbf{v}^{-1}}{\bar{m}} \cdot \int_0^t \mathbf{E}\mathbf{F}_{t-\tau} \cdot \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{N}_{t-\tau} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (67)$$

Die Gesamtlösung ist die Summe der homogenen und der partikulären Lösung.

Die Rücktransformation der generalisierten $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ auf die natürlichen $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ Koordinaten erfolgt über die Vormultiplikation von $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ mit der Modalmatrix Φ wie in Gleichung (50) definiert.

In den vorangegangenen Erläuterungen wurde die Modalmatrix Φ als Matrix der normierten Eigenvektoren mit der Dimension $n \times n$ eingeführt. Die Größe dieser Matrix stimmt also mit der Dimension der anderen Systemmatrizen ($\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$) überein. Es werden alle Moden der Struktur berücksichtigt.

Bei vielen Problemstellungen ist es jedoch nicht erforderlich, alle Moden zu berücksichtigen, da nur eine begrenzte Anzahl im tatsächlich angeregten Frequenzbereich liegt. Eine Beschränkung der Modalmatrix auf $n_r < n$ Eigenvektoren bzw. Eigenwerte ist in vielen Fällen also ausreichend, um das dynamische Verhalten hinreichend genau abzubilden, mit dem Vorteil, eine weitere Verkürzung der Rechenzeit herbeizuführen. Dies wird auch als unvollständige Transformation bezeichnet. Die Berechnung erfolgt analog zu dem vorstehend Gezeigten, wobei folgende Matrizen und Vektoren ihre Dimension, entsprechend der Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenmoden n_r und der Anzahl der Freiheitsgrade (Koordinaten) n , ändern:

Tabelle 2: Dimension der Vektoren und Matrizen bei unvollständiger Transformation

Vektor oder Matrix	Φ	$\omega, \Delta, \mathbf{v}, \mathbf{E}\mathbf{F}_t, \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{N}_t, \mathbf{C}\mathbf{O}\mathbf{S}_t$	\mathbf{q}
Dimension	$n \times n_r$	$n_r \times n_r$	n_r

Nasdala [NFE] S. 49 gibt als Anhaltswert für die Anzahl der zu berücksichtigenden Moden an, dass die Summe der effektiven Massen ca. 80% bis 90% der Gesamtmasse betragen soll.

Zur Berechnung der effektiven Masse wird zuerst der Beteiligungsfaktor, auch modale Beschleunigung genannt, berechnet.

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{\bar{m}} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{r}_j$$

mit $\mathbf{r}_j \dots$ Starrkörper-Beschleunigungsvektor, auf Eins normiert
 $j = 1,2,3$: Translationen $j = 4,5,6$: Rotationen um globales CS

(68)

Für die effektive Masse je Mode und globaler Richtung folgt daraus:

$$m_{ij}^{\text{eff}} = \bar{m} \Gamma_{ij}^2$$
(69)

Eine in der Praxis verbreitete Methode ist auch, die zu berücksichtigenden Moden auf den doppelten Frequenzbereich der vorhandenen Anregung zu beschränken. Dresig ([DSA] S. 165) gibt bei dieser Vorgehensweise einen Fehler von ca. 1% für die meisten Fälle an.

Neben den bereits angeführten Einschränkungen bei den Dämpfungseigenschaften - Stichwort „Bequemlichkeitshypothese“ - ist ein weiterer Nachteil hervorzuheben. Die modale Methode ist auf lineare Systeme beschränkt. Nichtlinearitäten, wie z. B. elasto-plastisches Materialverhalten, große Deformationen oder Kontakt, können nicht in der Analyse berücksichtigt werden. Als großer Vorteil ist die mitunter erhebliche Reduktion der Rechenzeit bei hinreichender Genauigkeit anzuführen, wobei die Beantwortung der Frage nach derselben nicht immer trivial ist.

4.1.4 Statische Kondensation

Eine weitere Methode zur Reduktion der Bewegungsgleichung ist die statische Kondensation. Hier geht man zunächst von der statischen Gleichung aus:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$
(70)

Es soll eine Transformationsmatrix \mathbf{T}_g gefunden werden, mit der die Anzahl der Freiheitsgrade des gesamten Systems \mathbf{u}_A auf eine geringere Anzahl von im System verbleibenden (Master) Freiheitsgraden \mathbf{u}_R reduziert wird.

$$\mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{u}_R$$
(71)

Der Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{u}_A ist dabei bereits derart umsortiert, dass die Master Freiheitsgrade zu Beginn und die eliminierten (Slave) Freiheitsgrade \mathbf{u}_L am Ende des

Vektors stehen. Die Gleichung (70) lässt sich nun mit den Teilmatrizen und -vektoren wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{AA} \cdot \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A$$

(72)

Wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix gilt: $\mathbf{K}_{LR}^T = \mathbf{K}_{RL}$

Die zweite Zeile aus (72) extrahiert, nach \mathbf{u}_L umgeschrieben

$$\mathbf{K}_{LR} \cdot \mathbf{u}_R + \mathbf{K}_{LL} \cdot \mathbf{u}_L = \mathbf{f}_L$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot (\mathbf{f}_L - \mathbf{K}_{LR} \cdot \mathbf{u}_R)$$

(73)

und in die erste Zeile eingesetzt, ergibt:

$$\mathbf{K}_{RR} \cdot \mathbf{u}_R + \mathbf{K}_{RL} \cdot \mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot (\mathbf{f}_L - \mathbf{K}_{LR} \cdot \mathbf{u}_R) = \mathbf{f}_R$$

$$(\mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RL} \cdot \mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LR}) \cdot \mathbf{u}_R = \mathbf{f}_R - \mathbf{K}_{RL} \cdot \mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot \mathbf{f}_L$$

$$\mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_R = \mathbf{f}_g$$

(74)

Man erkennt, dass der kondensierte Kraftvektor \mathbf{f}_g nicht nur aus den Kräften an den Masterknoten besteht, sondern auch die inneren Belastungen enthält! Nur für den Fall, dass keine inneren Kräfte auftreten (also $\mathbf{f}_L = 0$ ist), ergibt sich, dass $\mathbf{f}_g = \mathbf{f}_R$ ist.

Aus Gleichung (71) folgt für die Transformationsmatrix:

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Phi}_R \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_L = \boldsymbol{\Phi}_R \cdot \mathbf{u}_R$$

(75)

Wird nun dieser Ausdruck in (73) eingesetzt, kann die Submatrix $\boldsymbol{\Phi}_R$ bestimmt werden.

$$\boldsymbol{\Phi}_R \cdot \mathbf{u}_R = \mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot (\mathbf{f}_L - \mathbf{K}_{LR} \cdot \mathbf{u}_R)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_R = -\mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot (\mathbf{K}_{LR} - \mathbf{f}_L \mathbf{u}_R^{-1})$$

(76)

Mit dieser Transformationsmatrix können nun die kondensierten Systemmatrizen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_g &= \mathbf{T}_g^T \cdot \mathbf{K}_{AA} \cdot \mathbf{T}_g \\ \mathbf{M}_g &= \mathbf{T}_g^T \cdot \mathbf{M}_{AA} \cdot \mathbf{T}_g \\ \mathbf{D}_g &= \mathbf{T}_g^T \cdot \mathbf{D}_{AA} \cdot \mathbf{T}_g\end{aligned}\tag{77}$$

Für die dynamische Bewegungsgleichung folgt daraus:

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{u}}_R + \mathbf{D}_g \dot{\mathbf{u}}_R + \mathbf{K}_g \mathbf{u}_R = \mathbf{f}_g\tag{78}$$

Nach der Lösung des reduzierten Differentialgleichungssystems, also dem Bestimmen des Lösungsvektors $\mathbf{u}_R(t)$, kann entsprechend der Gleichung (71) die Rücktransformation auf den Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{u}_A erfolgen. Durch Umsortieren der Elemente des Vektors wird dann der Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{u} entsprechend der Reihung des Gesamtsystems erhalten. Diese Bearbeitungsfolge kann verkürzt werden, indem bereits eine modifizierte Transformationsmatrix \mathbf{T}_{go} , bei der die Zeilen Transformationsmatrix \mathbf{T}_g entsprechend der Originalreihung umsortiert werden, für die Rücktransformation verwendet wird.

Die Kondensation der Massen und der Steifigkeitsmatrix erfolgt entsprechend der Steifigkeit des Systems. Für eine rein statische Analyse ohne Massenträgheitseffekte ist diese Transformation exakt. Für die dynamische Analyse hingegen können durch dieses Vorgehen große Abweichungen zur korrekten Lösung entstehen, da die Massenverteilung und die Dämpfungseigenschaften keinen kausalen Zusammenhang zur Steifigkeit einer Struktur aufweisen. Um das Verfahren der statischen Kondensation dennoch erfolgreich einzusetzen, muss die Wahl der Masterfreiheitsgrade mit Bedacht durchgeführt werden. Stelzmann, Groth und Müller ([FfP2] S. 93) geben als Kontrollinstrument die Überprüfung der Gesamtmasse des kondensierten Modells an, welche nicht mehr als 10-15 Prozent von der Masse des Originalmodells abweichen soll. Zusätzlich ist ein Kriterienkatalog für die Auswahl der Hauptfreiheitsgrade angeführt: „...

- *wo große Verformungen vorliegen, bzw. wo das Verhältnis $\sqrt{\frac{K_{ii}}{M_{ii}}}$ klein ist.*
- *Hauptverformungsrichtung*
- *gewünschtes Ergebnis (Biege-, Translations-, Torsionsschwingung)*
- *an Überhängen oder an „lose“ angehängten Bauteilen ...*
- *nicht in der Nähe von Festhaltungen (Lagern)*
- *gleichmäßig verteilt*
- *so, daß alle Bewegungsmöglichkeiten erfaßt werden*

- *wo Verschiebungen als Ergebnisse gewünscht werden (gilt für transiente Analyse und für Frequenzganganalyse)*
- *wo Kräfte und Lagerverschiebungen ungleich Null definiert werden sollen (bei transienter Analyse und für Frequenzganganalyse)*
- *Hauptfreiheitsgrade müssen so gewählt sein, dass die Eigenformen auch dargestellt werden können, ...*
- *...*
- *bei einfachen ein- und zweidimensionalen Problemen sollten mindestens 2 Hauptfreiheitsgrade pro gewünschter Eigenfrequenz ausgewählt werden*
- *bei komplexen dreidimensionalen Problemen sollten ca. 10-100 Hauptfreiheitsgrade pro gewünschter Eigenfrequenz ausgewählt werden. “*

Bei der Anwendung der statischen Kondensation auf die Systemmatrizen der dynamischen Bewegungsgleichung wird diese auch als GUYAN Reduktion bezeichnet. Die Auflistung der Auswahlkriterien lässt bereits erahnen, dass die Wahl der Hauptfreiheitsgrade das Ergebnis einer Simulation mit statischer Kondensation stark beeinflussen kann, jedoch auch in erheblichem Maße vom jeweiligen Anwender bestimmt wird. In manchen kommerziellen Softwareprodukten (z. B. ANSYS) stehen Algorithmen zur automatischen Wahl der Masterfreiheitsgrade zur Verfügung, die entsprechend den Empfehlungen von Stelzmann, Groth und Müller [FfP2] S. 94 jedoch ein Nachbearbeiten erfordern. Dieser Umstand führte zur Notwendigkeit, verbesserte Reduktionsverfahren (wie z. B. die CMS Methode) zu entwickeln.

4.1.5 Component Mode Synthesis

Um die Qualität der statischen Kondensation zu verbessern, wurde ein Verfahren entwickelt, das zusätzlich die Idee der modalen Methode beim Bilden der Transformationsmatrix berücksichtigt. Dieser Ansatz geht auf Hurty (1965), Craig und Bampton (1968) zurück und wird als Component Mode Synthese (CMS) oder nach den Entwicklern Craig-Bampton [NFE] S. 249 oder auch Hurty-Craig-Bampton Verfahren [LFE] S. 268 bezeichnet.

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, die Kondensationsmatrix durch Eigenvektoren der Struktur zu erweitern. Wie bei der unvollständigen modalen Transformation wird die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenvektoren auf eine sinnvolle Anzahl begrenzt.

Im Laufe der Zeit wurden mehrere Subvarianten der Methode entwickelt. Die folgende Darstellung beschreibt die Fixed-Interface Methode, die dem ursprünglichen Ansatz von Craig und Bampton entspricht und in den meisten kommerziellen Programmen auch umgesetzt wurde. Die Free-Interface Methode zum Beispiel berücksichtigt besser höhere Moden, daneben existiert auch noch die Mixed-Interface Methode. Informationen hierzu sind bei Link [LFE] S. 273 oder in den Manuals der Softwarehersteller ANSYS [ANS1] S. 3 und NX NASTRAN [NXN2] S. 175 zu finden.

Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_g der statischen Kondensation lässt sich in Bezug auf den Verschiebungsvektor der natürlichen Koordinaten (71) wie folgt erweitern:

$$\mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{u}_c = [\mathbf{B} \quad \Phi] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (79)$$

Die generalisierten Koordinaten \mathbf{q}_m beziehen sich auf die in der Submatrix Φ enthaltenen Eigenvektoren. Diese Vektoren werden auch als „Fixed Base Mode Shapes“ bezeichnet, da die Eigenwertanalyse mit fixierten Masterfreiheitsgraden durchgeführt wird. Die Anzahl der berücksichtigten Moden wird im Regelfall deutlich geringer als die Anzahl der Slave Freiheitsgrade $\mathbf{m} \ll \mathbf{L}$ gewählt. Die Transformationsmatrix besteht aus den beiden Teilmatrizen \mathbf{B} und Φ , wobei \mathbf{B} identisch mit der Transformationsmatrix der statischen Kondensation \mathbf{T}_g (75) ist. Diese Matrix wird auch als „Constraint Modes“ oder „Boundary Modes“ bezeichnet.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \Phi_R \end{bmatrix} \quad (80)$$

Bei der Berechnung von Φ_R werden die inneren Kräfte gleich Null gesetzt, also $\mathbf{f}_L = \mathbf{0}$. Damit lässt sich Gleichung (76) vereinfachen zu:

$$\Phi_R = -\mathbf{K}_{LL}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LR} \quad (81)$$

Die Matrix Φ kann wiederum in zwei Teilmatrizen aufgespalten werden. In die Nullmatrix \mathbf{O} und in die Matrix der Eigenvektoren Φ_L .

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \Phi_L \end{bmatrix} \quad (82)$$

Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Verschiebungen an den externen Freiheitsgraden nicht durch die inneren Eigenvektoren beeinflusst werden. Die Gleichung (79) lässt sich nun mit den Submatrizen darstellen als:

$$\mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{u}_c = [\mathbf{B} \quad \Phi] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \Phi_R & \Phi_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (83)$$

Daraus folgt für die Vektoren der Master- und Slave- Freiheitsgrade:

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}_R + \mathbf{O} \cdot \mathbf{q}_m$$

$$\mathbf{u}_L = \boldsymbol{\Phi}_R \cdot \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Phi}_L \cdot \mathbf{q}_m$$

(84)

Die Bewegungsgleichung lässt sich mit einer Partitionierung in Teilmatrizen (wie bereits bei der statischen Kondensation) anschreiben:

$$\mathbf{M}_{AA} \ddot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{D}_{AA} \dot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{K}_{AA} \mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \mathbf{M}_{RL} \\ \mathbf{M}_{LR} & \mathbf{M}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_R \\ \ddot{\mathbf{u}}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{D}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{u}}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix}$$

(85)

Wird nun die Craig-Bampton Transformation auf die Gleichung (85) angewandt, folgt:

$$\mathbf{M}_{AA} \mathbf{T}_c \ddot{\mathbf{u}}_c + \mathbf{D}_{AA} \mathbf{T}_c \dot{\mathbf{u}}_c + \mathbf{K}_{AA} \mathbf{T}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{f}_A$$

$$\mathbf{M}_{AA} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{AA} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \mathbf{K}_{AA} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \mathbf{f}_A$$

(86)

Eine Multiplikation der Gleichung mit der Matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^T$ führt zu:¹⁶

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{f}_A$$

(87)

Durch weitere Vereinfachung mit den Systemmatrizen der modalen Analyse (52), (53) und (60) folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{B} & \bar{\mathbf{m}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{m}} \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{m}} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{Bm} \\ \mathbf{M}_{mB} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R + \boldsymbol{\Phi}_R^T \cdot \mathbf{f}_L \\ \boldsymbol{\Phi}_L^T \cdot \mathbf{f}_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{u}}_c + \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{u}}_c + \mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{f}_c$$

(88)

¹⁶ Der Index $_{AA}$ wurde bei den Systemmatrizen $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ zur übersichtlicheren Darstellung weggelassen.

Mit der Lösung der dynamischen Aufgabenstellung liegt der Vektor $\mathbf{u}_c(t)$ vor. Die Rücktransformation erfolgt dann analog der Vorgehensweise bei der statischen Kondensation. Auch hier ist es vorteilhaft, die Transformationsmatrix umzusortieren, sodass direkt der Verschiebungsvektor \mathbf{u} anstelle von \mathbf{u}_A erhalten wird.

Mit der Craig-Bampton Transformation ist es nun möglich, die Nachteile der statischen Kondensation weitgehend zu vermeiden. Einzig die Wahl der zu berücksichtigenden Moden verbleibt - wie auch schon bei der unvollständigen modalen Analyse - als Hürde. Es können jedoch auch die gleichen Überlegungen zur Genauigkeit angestellt werden. Berücksichtigt man hingegen alle Eigenvektoren der zu eliminierenden Freiheitsgrade, führt dies zu exakt dem gleichen Ergebnis wie bei der direkten Lösung mit vollen Matrizen. In der Praxis macht dies keinen Sinn, da der Rechenaufwand nun zumindest gleich dem des direkten Verfahrens ist. Für Vergleichszwecke an einfachen Modellen kann dadurch jedoch die Korrektheit der Berechnung geprüft werden. Als Nachteil der Methode ist anzuführen, dass analog zur modalen Analyse bei der Component Mode Synthese innerhalb des reduzierten Gebiets keine Nichtlinearitäten berücksichtigt werden können. Für die Dämpfungsmatrix werden wiederum nur modal proportionale Dämpfungsansätze zugelassen.

4.2 Substrukturen

Die bisherige Beschreibung der Verfahren bezog sich jeweils auf ein gesamtes Gleichungssystem. Für die Berechnung von Gesamtsystemen bedeutet dies möglicherweise, dass die „schnellen“ Berechnungsverfahren (modale Analyse, GUYAN und CMS Reduktion) aufgrund deren Einschränkungen hinsichtlich Dämpfung und Nichtlinearitäten nicht für die Analyse verwendet werden können. Abhilfe bietet hier der Ansatz, die Reduktion der Bewegungsgleichung nur für Teilgebiete, den sogenannten Substrukturen [ANS1], durchzuführen. Die reduzierten Matrizen werden auch als Superelemente [NXN2] bezeichnet, passend zu ihrer Verwendung als Ersatz für eine Vielzahl von Elementen im ursprünglichen Modell. Viskose Dämpferelemente und Nichtlinearitäten können nun im Gesamtmodell verwendet werden. Es sind also nahezu keine Einschränkungen in der Analyse vorhanden.

Ein weiterer Vorteil ist die Wiederverwendung von bereits erstellten Matrizen, was eine zusätzliche Verkürzung der Rechenzeit bedeutet. Bei mehrfach vorhandenen Teilstrukturen ist dies ebenfalls von Nutzen.

Die Zusammenarbeit an großen Berechnungsprojekten zwischen unterschiedlichen Abteilungen oder Unternehmen wird durch die Substrukturtechnik ebenfalls erleichtert. Obwohl mit einem Superelement die Eigenschaften einer Strukturkomponente übergeben werden, bleiben die konstruktiven Details verborgen. Dieser Aspekt ist vor allem dann ein wichtiger Faktor, wenn im Wettbewerb stehende Unternehmen an einen gemeinsamen Auftraggeber Berechnungsmodelle liefern müssen.

Superelemente können auch verschachtelt verwendet werden und dadurch ein hierarchisches Berechnungsmodell - ähnlich der Baumstruktur einer CAD Baugruppe - realisiert werden. Die Rücktransformation der Ergebnisse muss nicht für alle Substrukturen im Berechnungsmodell durchgeführt werden, sondern kann sich auf die relevanten Bereiche beschränken. Ein anschauliches Beispiel dazu ist im NX Nastran Handbuch „Superelements“ [NXN2] S. 119 ff dargestellt. Ein gesamtes Flugzeug wird hier aus Superelementen aufgebaut.

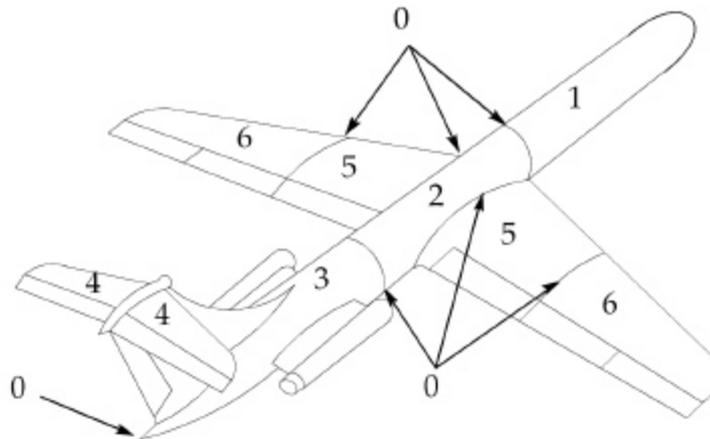


Abbildung 33: Gesamtmodell eines Flugzeugs / Quelle: [NXN2]

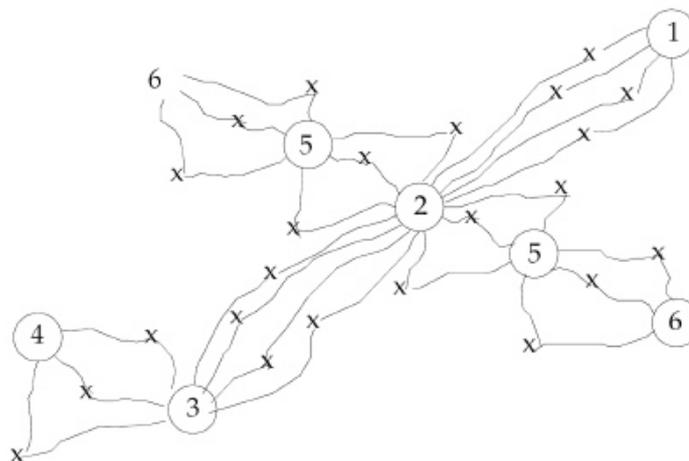


Abbildung 34: Gesamtmodell mit Superelementen / Quelle: [NXN2]

Nicht nur bei klassischen FEM Anwendungen findet diese Methode Verwendung, sondern auch im Bereich der Mehrkörperdynamik. Flexible Strukturen werden durch das Einführen von CMS reduzierten Superelementen in das Berechnungsmodell eingebunden. In diesem Zusammenhang spricht man auch von „flexibler Mehrkörperdynamik“ (MFBD).

4.3 Die Spannungstransformation

Der innere Beanspruchungszustand einer Struktur wird auch als Spannung bezeichnet. Über die Änderung der lokalen Verformung – diese wird als Dehnung oder Verzerrung bezeichnet – und werkstoffspezifische Parameter lässt sich die Spannung für jeweils einen Punkt der Struktur berechnen. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen σ und den Verzerrungen ε in einem Bauteil wird über das Materialgesetz (hier das Hooksche Gesetz für den eindimensionalen Fall) definiert. E steht für den Elastizitätsmodul des Werkstoffs.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (89)$$

Im dreidimensionalen Fall sind die Spannungen und Verzerrungen Tensoren zweiter Stufe und der Elastizitätstensor von der vierten Stufe. Details dazu sind z. B. in der „Einführung in die höhere Festigkeitslehre“ von Kienzler und Schröder enthalten. [KSF]

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (90)$$

Da zwischen den Dehnungen und den Spannungen ein linearer Zusammenhang besteht, lässt sich eine Spannungsmatrix σ_E erstellen, die den Spannungszustand an jedem Knoten aufgrund einer Einheitsverschiebung in Richtung des jeweiligen Freiheitsgrades repräsentiert. Aus der Multiplikation dieser Matrix mit dem Verschiebungsvektor erhält man die Spannungen an jedem Knoten über der Zeit.

$$\sigma(\mathbf{t}) = \sigma_E \cdot \mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (91)$$

Die bei den jeweiligen Reduktionsverfahren erstellte Transformationsmatrix \mathbf{T}^{17} kann nun verwendet werden, um die Spannungsmatrix σ_E derart zu erweitern, dass in weiterer Folge direkt aus dem Verschiebungsverlauf der generalisierten Koordinaten die Spannung für alle Knoten der Struktur berechnet werden kann. Die Spannungstransformationsmatrix \mathbf{T}_σ ergibt sich aus der Matrizenmultiplikation:

$$\mathbf{T}_\sigma = \sigma_E \cdot \mathbf{T} \quad (92)$$

¹⁷ Das gilt sowohl für \mathbf{T}_g als auch für \mathbf{T}_c

Mit dem Verlauf der Verschiebungen \mathbf{u}_R (der statischen Kondensation) bzw. \mathbf{u}_c (der CMS Reduktion) folgt für die Spannung an allen Knoten:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_{\sigma R} \cdot \mathbf{u}_R(\mathbf{t}) \qquad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}_{\sigma c} \cdot \mathbf{u}_c(\mathbf{t}) \qquad (93)$$

Hier ist wieder zu beachten, dass die eigentliche Transformationsmatrix der jeweiligen Reduktionsverfahren \mathbf{T} die Freiheitsgrade in umsortierter Reihenfolge - entsprechend der Master/Slave Zuordnung - enthält. Bei Verwendung dieser Matrizen muss der resultierende Vektor der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t})$ wieder auf die Reihenfolge der natürlichen Koordinaten umsortiert werden. Empfehlenswert ist es jedoch bereits mit der rücksortierten Transformationsmatrix \mathbf{T}_0 zu arbeiten. Die Spannungstransformationsmatrix $\mathbf{T}_{\sigma 0}$ führt dann direkt zum Spannungsvektor in der Reihenfolge der Originalfreiheitsgrade.

Für die Berechnung der Spannungen in Abhängigkeit von der Zeit bedeutet dies einen enormen Zeitgewinn sowie eine Reduktion der Datenmenge für den Fall, dass nur die Spannungen und nicht die Verformungen in jedem Knoten von Interesse sind. Bei der Lebensdaueranalyse ist genau dies der Fall, wie in den Beispielen der Kapitel 5 und 6 gezeigt wird. Hinsichtlich der Genauigkeit ergeben sich keine Einbußen, was eindeutig für diese Vorgehensweise spricht.

4.4 Verifikation der Reduktionsmethoden

Wie bereits bei der Beschreibung der jeweiligen Reduktionsverfahren angeführt wurde, nimmt die Frage nach der Genauigkeit der Abbildung eine wichtige Rolle bei der Anwendung derselben ein. Allgemeine Empfehlungen zur Wahl der Masterfreiheitsgrade (siehe Kapitel 4.1.4) bzw. zu der Wahl der Anzahl der zu berücksichtigenden Moden (siehe Kapitel 4.1.5) wurden bereits diskutiert. Um jedoch einen quantitativen Vergleich zu ermöglichen werden Vergleichskriterien verwendet.

4.4.1 NFD Kriterium

Für die Beurteilung der dynamischen Eigenschaften liegt es nahe, die Eigenfrequenzen (f_o - siehe Gl. (43)) der reduzierten Struktur mit denen des ursprünglichen FEM Modells¹⁸ zu vergleichen. Das „Natural Frequency Difference“ – Kriterium (NFD) stellt diesen Vergleich wie folgt an:

$$\text{NFD}_{i,j} = \frac{|f_{o \text{ red},i} - f_{o,j}|}{\min(f_{o \text{ red},i}, f_{o,j})} \qquad (94)$$

¹⁸ Der Vergleich kann natürlich auch zwischen zwei reduzierten Strukturen angestellt werden.

Identische Eigenfrequenzen ergeben einen NFD Wert von Null. Die Darstellung der Ergebnisse kann in Form einer Matrix erfolgen. Die Sinnhaftigkeit dieser Darstellung wird jedoch in Frage gestellt, da ohnehin nur zugeordnete Moden, also Moden mit nahezu gleichen Eigenformen, verglichen werden sollten. Die Darstellung der NFD Werte der Hauptdiagonalelemente macht hier also mehr Sinn. Wie kann jedoch die „Gleichheit“ der Eigenformen überprüft werden? Das NFD Kriterium gibt darüber keine Auskunft und reicht daher nicht aus, um eine zuverlässige Aussage über die Qualität der Reduktion zu treffen. Das Kriterium sollte daher nur ergänzend angewandt werden (siehe [KMD] Kap. 3.2).

Abbildung 35 zeigt den NFD-Plot einer Beispielstruktur bei der die Eigenfrequenzen der nicht-reduzierten Struktur mit denen der CMS-reduzierten Struktur gegenübergestellt werden. Aus dem Graphen der Hauptdiagonalelemente ist ersichtlich, dass ab der 20. Eigenfrequenz große Abweichungen vorhanden sind.

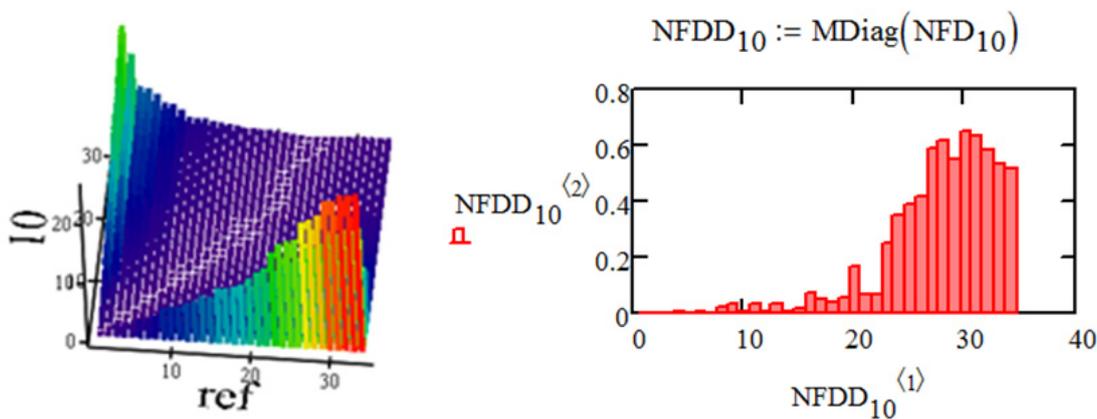


Abbildung 35: NFD Plot - Matrix und Hauptdiagonalelemente

4.4.2 MAC Kriterium

Ursprünglich für den Vergleich von gemessenen Eigenfrequenzen und -vektoren entwickelt, kann das „Modal Assurance Criterion“ (MAC) auch für die Evaluierung von Simulationsmodellen verwendet werden. Die Korrelation der Eigenvektoren (i, j) wird durch das Bilden eines normierten Skalarprodukts derselben bewertet ([DHM] S. 378).

$$\text{MAC}_{i,j} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{j,\text{red}})^2}{(\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_i) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{j,\text{red}}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{j,\text{red}})} \quad (95)$$

Eine perfekte Korrelation eines Eigenvektorpaars ergibt den Wert $\text{MAC}_{i,j} = 1$. Dresig und Holzweißig geben als Wert für eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Versuch $\text{MAC}_{i,j} > 0.8$ an. Liegt das Kriterium $\text{MAC}_{i,j} < 0.3$, so besteht hingegen kaum eine Ähnlichkeit zwischen den Eigenvektoren ([DHM] S. 378).

Die Darstellung erfolgt anschaulich in Form eines Matrixplots. Mit dem MAC Kriterium können auch Eigenformen bewertet werden, deren Eigenfrequenzen nah beieinanderliegen. Auch eine Umreihung der Eigenfrequenzen zwischen zwei Modellen kann durch gute Korrelationswerte außerhalb der Hauptdiagonalen der Matrix leicht identifiziert werden. Eine ergänzende grafische Darstellung der Hauptdiagonalelemente ist empfehlenswert.

Abbildung 36 zeigt den MAC Plot des bereits zuvor gezeigten Beispiels. Bis zur 14. Eigenform ist eine gute Übereinstimmung vorhanden, danach liegen mittlere Korrelationswerte außerhalb der Hauptdiagonalen vor. Eine Zuordnung der Eigenformen ist direkt möglich. Bei dem reduzierten Modell (hier mit 10 bezeichnet) fehlen also eindeutig Moden, die im Referenzmodell vorhanden sind.

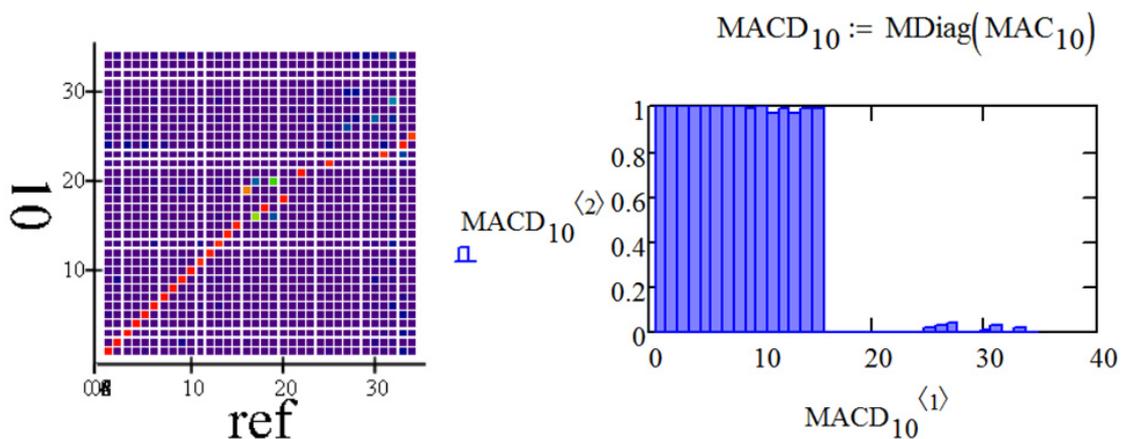


Abbildung 36: MAC Plot - Matrix und Hauptdiagonalelemente

4.4.3 NMD Kriterium

Bei einer unzureichenden Korrelation zweier Eigenvektoren stellt sich die Frage, welche Freiheitsgrade dafür ursächlich sind. Eine Möglichkeit dies zu beurteilen, besteht in der Anwendung des „Normalized Modal Difference“ Kriteriums (NMD). Hier wird die Abweichung einzelner Eigenvektorkoordinaten eines Modenpaares (i, j) berechnet. Es ist damit gut geeignet, die Abbildungsgenauigkeit zu beurteilen. Der „Modal Scale Factor“ (MSF) normiert den Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_{j,\text{red}}$ zum Referenzvektor $\boldsymbol{\varphi}_i$.

$$\text{MSF}_{i,j} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{j,\text{red}}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_i} \quad (96)$$

Das NMD Kriterium berechnet sich wie folgt:

$$\text{NMD}_{i,j}(n) = \frac{\varphi_{i,\text{red}}(n) - \text{MSF}_{i,j} \cdot \varphi_i(n)}{\varphi_{i,\text{red}}(n)} \quad (97)$$

Mit $n = 1 \dots$ Anzahl Freiheitsgrade (DOF).

Ein identischer Verschiebungswert des Freiheitsgrads n eines Modenpaares führt zu einem NMD-Wert $NMD_{i,j}(n) = 0$. Vorsicht ist jedoch bei der Interpretation geboten! Bei sehr kleinen Verschiebungswerten (nahe Null), können sehr hohe NMD Werte auftreten, obwohl eine gute Korrelation vorliegt. Eine isolierte Verwendung des NMD Kriteriums ohne MAC Wert scheint daher nicht sinnvoll.

Erneut wird das in Abbildung 35 und Abbildung 36 dargestellte Beispiel zur Diskussion verwendet. Für das Modenpaar ($i = 2, j = 2$) ergibt sich ein $MAC_{2,2} = 0.999$. Es liegt also eine nahezu perfekte Korrelation vor. Der NMD Plot zeigt eine Konzentration der Datenpunkte (es wurde ein Modell mit ca. 25 Tausend Freiheitsgraden verwendet) um die Abszisse des Diagramms. Das zweite Modenpaar ($i = 17, j = 16$) weist einen MAC Wert von $MAC_{17,16} = 0.715$ auf. Es sind erhebliche Abweichungen über das gesamte Modell erkennbar.

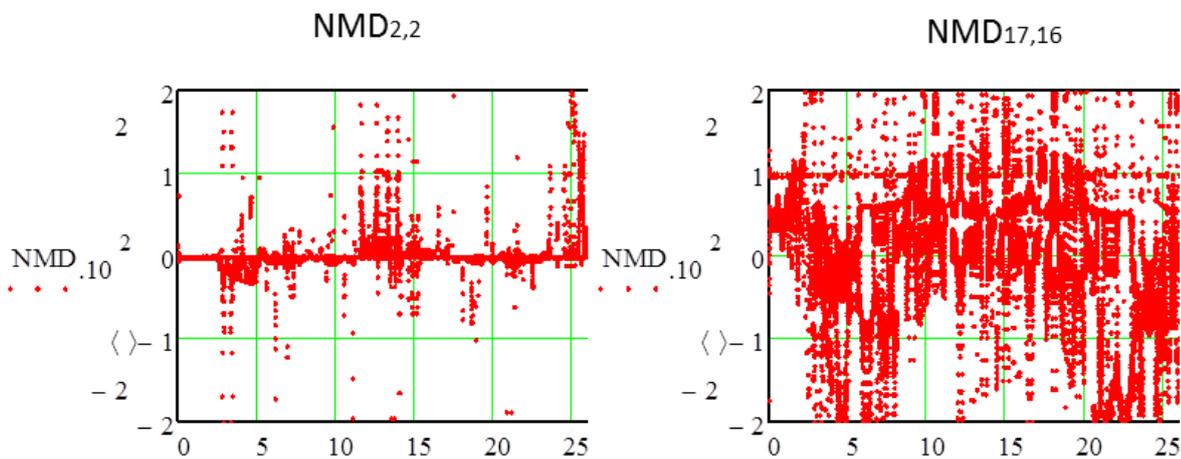


Abbildung 37: NMD Plot für die Modenpaare (2,2) – links - und (17,16) - rechts

5 Einführungsbeispiel Biegebalken

An einem einfachen Beispiel sollen nun die statische Kondensation (Guyan Reduktion) und die Component Mode Synthese (Craig-Bampton Reduktion) mit der direkten Analyse verglichen werden. Die Berechnungsblätter zum Beispiel sind im Anhang Teil 3 enthalten.

5.1 Beschreibung der Aufgabenstellung

Ein Biegebalken mit einseitig eingespannter Lagerung – gemeinhin auch als Kragträger bezeichnet – wird zur Umgebung hin durch ein viskoses Feder-Dämpfer-Element gelagert. Der Träger hat einen Kreisquerschnitt mit $d_s = 10\text{mm}$ Durchmesser, bei einer Länge von $l_s = 1\text{m}$. Am Ende des Trägers ist eine Zusatzmasse der Größe $m_b = 2\text{kg}$ angebracht. Das Feder-Dämpfer-Element weist eine Federsteifigkeit von $k_b = 100\text{N/mm}$ und eine Dämpfungsrate von $d_b = 1\text{Ns/m}$ auf. Dieses Element ist in der Höhe von $l_b = 0.8\text{m}$ positioniert.

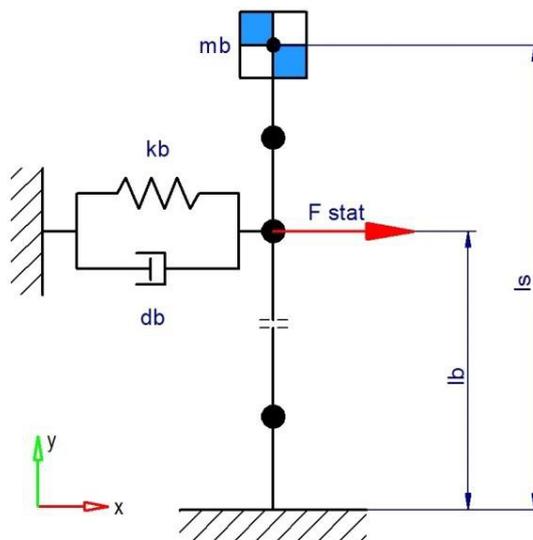


Abbildung 38: Beispiel Biegebalken - Gesamtsystem

Um die Vorgehensweise der Substrukturtechnik in dem Beispiel zu berücksichtigen, wird zuerst der Kragträger isoliert betrachtet. Die Diskretisierung erfolgt durch insgesamt $n = 10$ Segmente, an deren Ende sich die Knoten mit den Freiheitsgraden in der X-Richtung befinden. Die Masse der Balkensegmente wird mit konzentrierten Massen (jeweils 50%) an den beiden Enden abgebildet. Das Material des Stabs ist Stahl mit einer Dichte von $\rho_s = 7850\text{kg/m}^3$ und einem Elastizitätsmodul von $E_s = 2.1 \cdot 10^5\text{MPa}$. Als Master-Freiheitsgrade werden die Verschiebungen der Knoten 1 und 3 (in der

Abbildung rot markiert) festgelegt. Speziell bei der Guyan Reduktion sollten für aussagekräftige Ergebnisse zusätzliche Masterknoten gewählt werden, worauf jedoch bewusst verzichtet wurde, um die Unterschiede der Methoden besser aufzuzeigen.

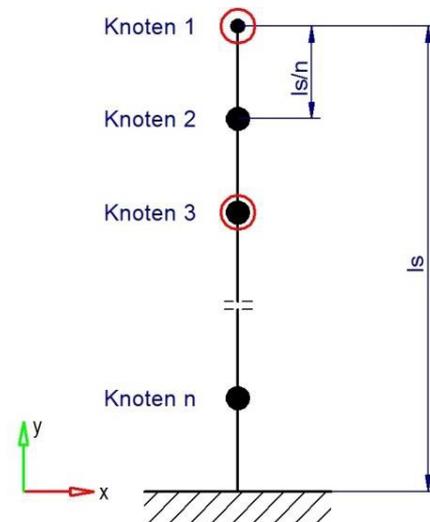


Abbildung 39: Beispiel Biegebalken - Substruktur

Das Ausschwingverhalten aus einer statischen Ruhelage heraus ist Gegenstand des Interesses. Die statische Vordeformation erfolgt durch eine im Bereich des Federlagers angreifende Differenzkraft $F_{stat} = 25 \text{ N}$ ¹⁹, was zu der nachstehend dargestellten Deformation, entsprechend der Differentialgleichung der Biegelinie ([DTM] S. 250), führt.

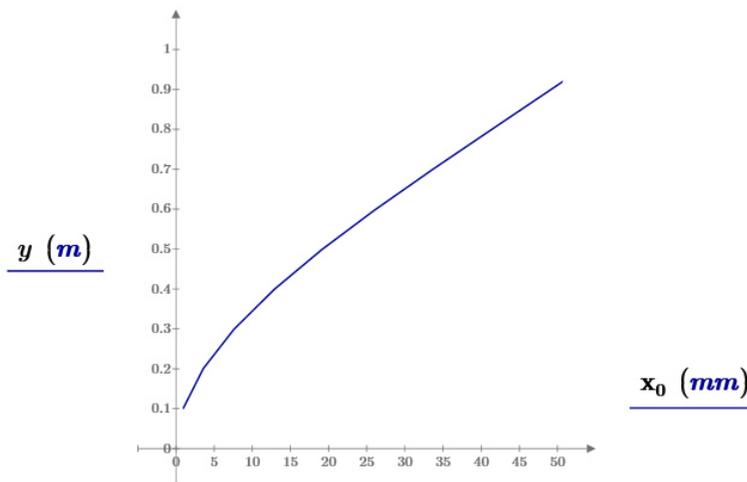


Abbildung 40: Statische Vordeformation des Biegebalkens

¹⁹ Die tatsächlich zur Auslenkung erforderliche Kraft muss noch um die in der Feder, entsprechend der durch die Auslenkung auftretende, wirkende Kraft erhöht werden. Die gewählte Beschreibung entspricht der am Kragträger ohne Federlager angreifenden Kraft.

Die Bildung der Systemmatrizen, sowie die weitere Berechnungsschritte folgen dem im Forschungsmodul [AFM] gezeigten Ablauf. Die Reduktion der Freiheitsgrade wurde entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.1 durchgeführt. Der detaillierte Ablauf ist im Anhang Teil 3 dargestellt.

5.2 Eigenwertanalyse der Substruktur

Der Vergleich des Verhaltens der Substrukturen wird über die Modalanalyse angestellt. Um die Auswirkung der inneren Moden bei der CMS Reduktion zu erfassen, wird die Anzahl der „Fixed Base Mode Shapes“ n_q beginnend bei 1 bis zur maximalen Anzahl von 8 erhöht. Die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade ergibt sich durch die Summe der modalen und der Master Freiheitsgrade. Wie bereits bei der Beschreibung der modalen Analyse und der CMS Methode angemerkt, führt die Berücksichtigung aller inneren Moden zum identischen Ergebnis des direkten Verfahrens.

Tabelle 3: Eigenfrequenzen [Hz] der Substruktur

Mode	GUYAN	CMS								FULL
		nq1	nq2	nq3	nq4	nq5	nq6	nq7	nq8	
1	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2
2	53,9	44,7	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6	44,6
3		138,8	124,2	123,8	123,7	123,7	123,7	123,7	123,7	123,7
4			249,5	240,8	240,7	240,2	240,0	239,9	239,9	239,9
5				395,3	394,5	392,9	392,4	392,2	392,2	392,2
6					585,2	578,0	578,0	578,0	578,0	578,0
7						852,9	793,0	791,3	791,2	791,2
8							1051,8	1018,4	1016,7	1016,7
9								1232,0	1224,8	1224,8
10									1372,8	1372,8

Die nachstehende Abbildung zeigt die relative Abweichung der jeweiligen Eigenfrequenz der Substruktur zur Referenzlösung (direktes Lösungsverfahren). Wie zu erwarten war, führt die statische Kondensation zu den größten Abweichungen (ca. 20%). Die Frequenz des ersten Modes wird jedoch auch schon bei dieser Methode mit einer relativ geringen Abweichung erreicht. Bei der CMS Methode sind die Abweichungen, abhängig von der Anzahl der inneren Moden, unterschiedlich hoch. Wird jedoch der Empfehlung gefolgt, die Moden bis zum doppelten Wert der Anregungsfrequenz zu berücksichtigen, kann im Anregungsbereich kaum ein Unterschied zur Referenzlösung festgestellt werden. Die Qualität sowohl der statischen Kondensation als auch der Component Mode Synthese könnte durch einen zusätzlichen Masterknoten unterhalb der Lagerstelle deutlich verbessert werden. Die im Kapitel 4.1.4 angeführten Kriterien können zur Auswahl dieses Knotens herangezogen werden. Eine Studie der Eigenformen der Substruktur vor der Verwendung innerhalb eines Gesamtsystems liefert eine Grundlage zur Entscheidungsfindung.

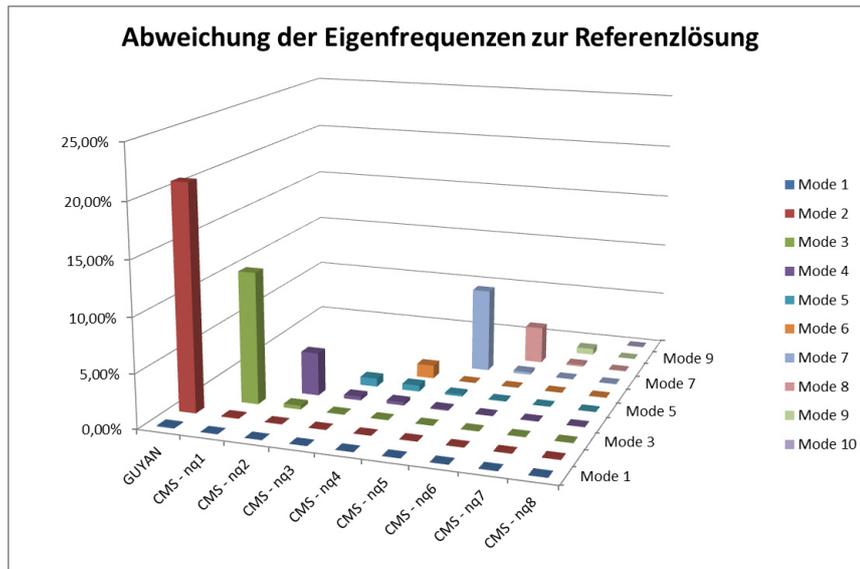


Abbildung 41: Relative Abweichung der Eigenfrequenzen der Substruktur

5.3 Eigenwertanalyse des Gesamtsystems

Bei genauerer Betrachtung reicht es jedoch nicht aus, das dynamische Verhalten der Substruktur bei der Wahl der Freiheitsgrade isoliert zu optimieren, sondern mit Bedacht auf die Verwendung im Gesamtsystem. Durch die im Beispiel angebrachte Zusatzmasse und Lagerung verändern sich Eigenfrequenzen und -vektoren. Die statische Kondensation führt nun zu deutlich höheren Abweichungen im zweiten Mode (ca. 60%), der erste wird wieder ohne nennenswerte Differenz erreicht. Bei der CMS Reduktion kann ein ähnliches Verhalten wie bei der Betrachtung des isolierten Bauteils festgestellt werden.

Tabelle 4: Eigenfrequenzen [Hz] des Gesamtsystems

Mode	GUYAN	CMS								FULL
		nq1	nq2	nq3	nq4	nq5	nq6	nq7	nq8	
1	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
2	87,1	54,8	54,8	54,8	54,8	54,8	54,8	54,8	54,8	54,8
3		157,3	136,3	136,0	136,0	135,7	135,7	135,7	135,7	135,7
4			241,1	236,6	236,3	234,0	233,6	233,5	233,5	233,5
5				372,8	372,3	369,2	368,8	368,7	368,7	368,7
6					557,9	554,6	554,4	554,4	554,4	554,4
7						829,2	777,5	775,5	775,3	775,3
8							1040,6	1010,5	1008,8	1008,8
9								1228,6	1222,0	1222,0
10									1372,2	1372,2

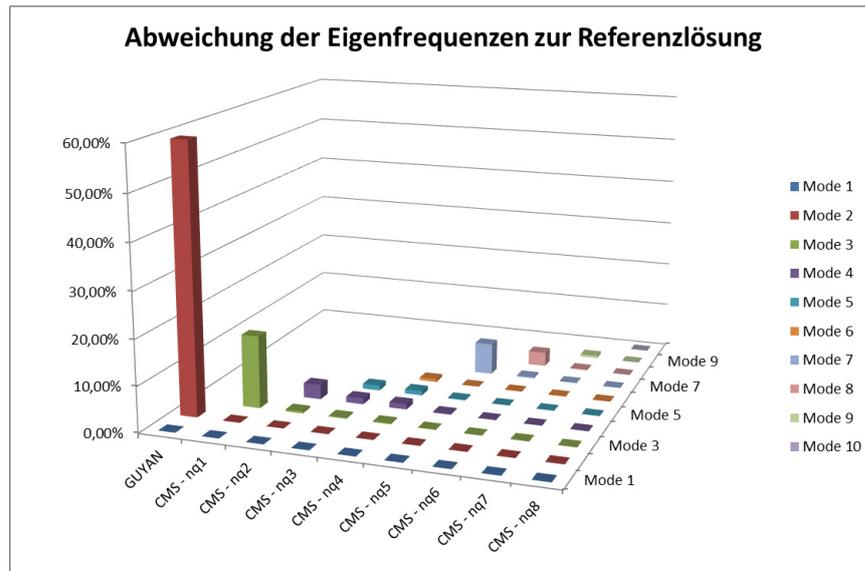


Abbildung 42: Relative Abweichung der Eigenfrequenzen des Gesamtsystems

Sowohl für die Substruktur als auch für das Gesamtsystem konnten die positive Auswirkung der Anreicherung durch Eigenmoden, also der Anwendung des CMS Verfahrens, gegenüber der statischen Kondensation gezeigt werden. Dies gilt auch für die Identität der Ergebnisse mit dem direkten Verfahren bei der Berücksichtigung aller Eigenmoden der Substruktur.

5.4 Freie Schwingung Gesamtsystem

Für den Ausschwingvorgang werden nun die Ergebnisse sowohl der statischen Kondensation als auch der CMS Reduktion (mit $n_q = 8$) mit den Ergebnissen der direkten Methode verglichen. Die Wahl für die maximale Anzahl der Moden bei der CMS Reduktion wurde bewusst zum Beweis der Identität der Ergebnisse zum direkten Verfahren vorgenommen. Neben dem Verschiebungsverlauf an ausgewählten Freiheitsgraden sind auch die Spannungsergebnisse von Interesse.

Für alle drei Berechnungsvarianten wurden folgende Knoten zum Vergleich der Verschiebungen herangezogen:

- Knoten $mdof_1 = 1$: Freies Balkenende
- Knoten $mdof_2 = 3$: Lagerstelle; Anbindung Feder/Dämpfer
- Knoten $p = 7$: Mitte zwischen Einspannstelle und Lagerstelle

Die Biegespannungen wurden für die folgenden Knoten ausgewertet:

- Knoten $i = 3$: Lagerstelle; Anbindung Feder/Dämpfer
- Knoten $k = 4$: unterhalb der Lagerstelle
- Knoten $p = 10$: letzter Knoten vor der Einspannstelle

Bei dem direkten Berechnungsverfahren liegen die Verschiebungen an allen Knoten unmittelbar nach der Analyse vor. Die Spannungen können dann folglich direkt unter Anwendung der Spannungsmatrix σ_E (91) berechnet werden. Bei der Analyse mit Substrukturen sind als primäre Ergebnisse der Analyse vorerst nur die Verschiebungen an den Masterknoten bzw. an den generalisierten Koordinaten vorhanden. Erst durch die Rücktransformation auf die natürlichen Koordinaten, unter Anwendung der Transformationsmatrizen T_g (71) oder T_c (79), liegen die Verschiebungen an allen Knoten vor. Die Ermittlung der Spannungen erfolgt äquivalent mit der jeweiligen Spannungstransformationsmatrix T_σ (92)(93).

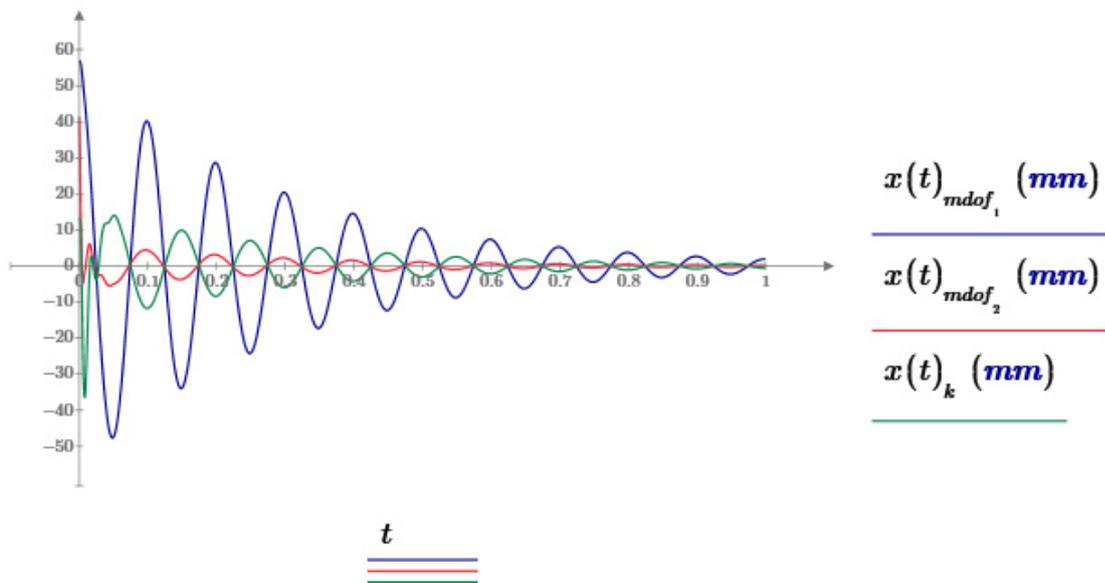


Abbildung 43: Verschiebungsverlauf - direktes Verfahren

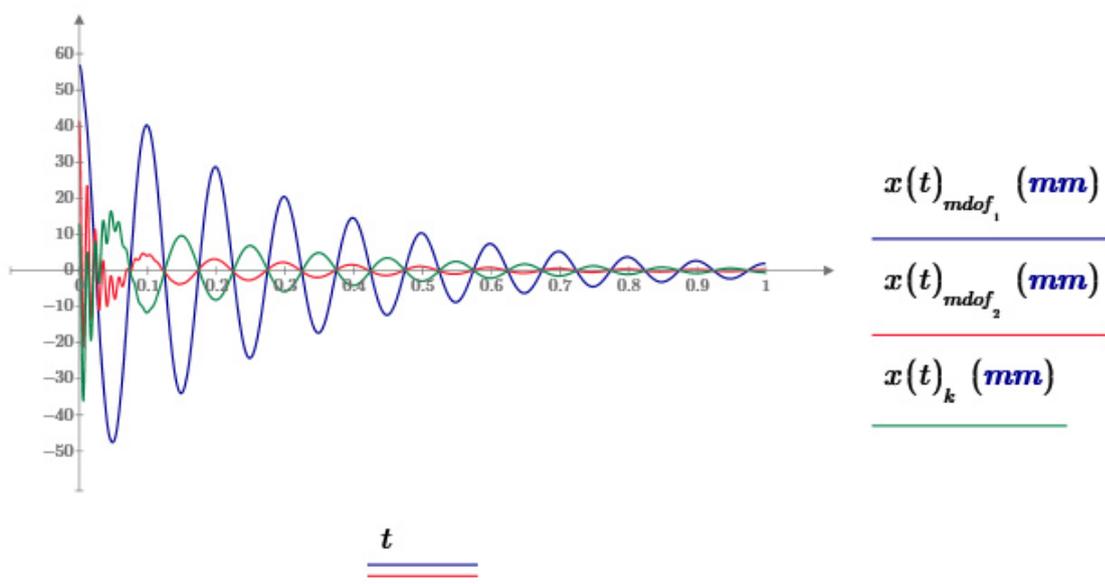


Abbildung 44: Verschiebungsverlauf - GUYAN Superelement

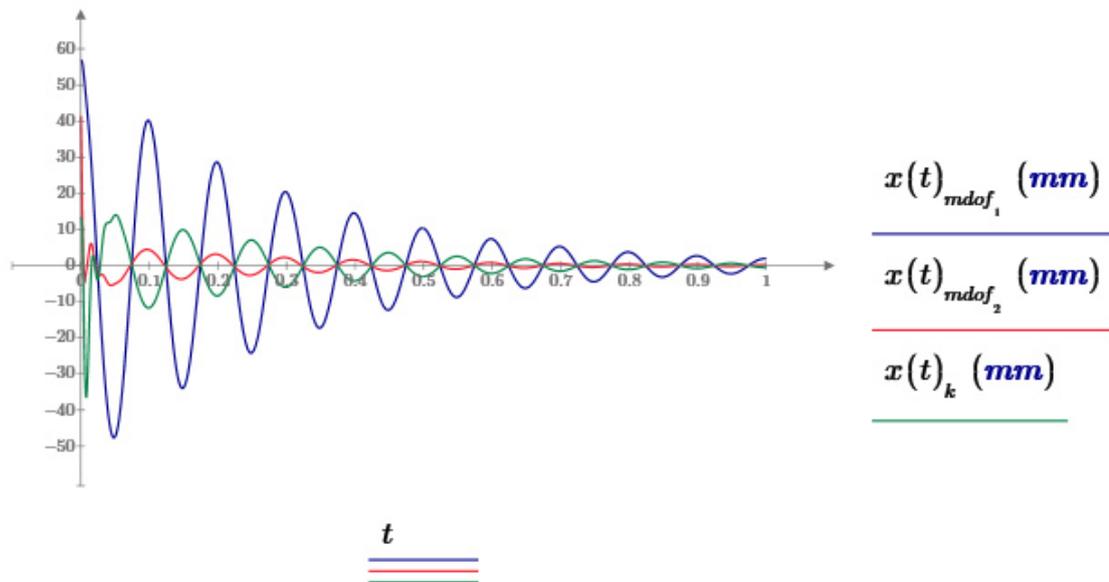


Abbildung 45: Verschiebungsverlauf - CMS Superelement ($n_q = 8$)

Bereits durch einen qualitativen Vergleich des Zeitverlaufs der Verschiebungen lässt sich ein Unterschied - vor allem im Bereich der ersten Zehntelsekunde - zwischen dem GUYAN reduzierten Berechnungsmodell und den beiden anderen Varianten ausmachen. Der Vergleich der beiden anderen Verfahren hingegen lässt keinen offensichtlichen Unterschied erkennen. Um die Verfahren quantitativ zu vergleichen, wurde als Bewertungskriterium das Ergebnis des direkten Verfahrens x_{b1} - als Referenzlösung - jeweils mit den Ergebnissen der beiden anderen Verfahren x_{bi} ²⁰ in Verhältnis gestellt. Der Quotient rx_{b1i} ist somit eine relative Vergleichsgröße der Ergebnisse.

$$rx_{b1i} = \frac{x_{b1}}{x_{bi}}$$

(98)

Aus den Verläufen der Verschiebungsverhältnisse lässt sich für alle Knoten die Identität der Ergebnisse zwischen der Berechnung mit dem direkten Verfahren und dem CMS Superelement erkennen. Der Vergleichsquotient ist konstant eins. Achtung! Dies ist jedoch nur der Fall da beim CMS Superelement alle Moden der Substruktur inkludiert wurden ($n_q = 8$). Bei einer geringeren Anzahl an Moden - dies ist bei der praktischen Anwendung der Methode der Fall - werden Abweichungen auftreten. Bei dem Berechnungsmodell mit dem GUYAN reduzierten Superelement sind Abweichungen an allen Knoten vorhanden, welche sich durch den Verlauf des jeweiligen Verhältniswerts darstellen lassen. Die bereits bei der qualitativen Betrachtung der Ausschwingkurven erkannten Abweichungen im Bereich der ersten Zehntelsekunde treten nun noch deutlicher hervor.

²⁰ Der Index i steht für die Reduktionsmethode; 2 = statische Kondensation; 3 = Component Mode Synthese.

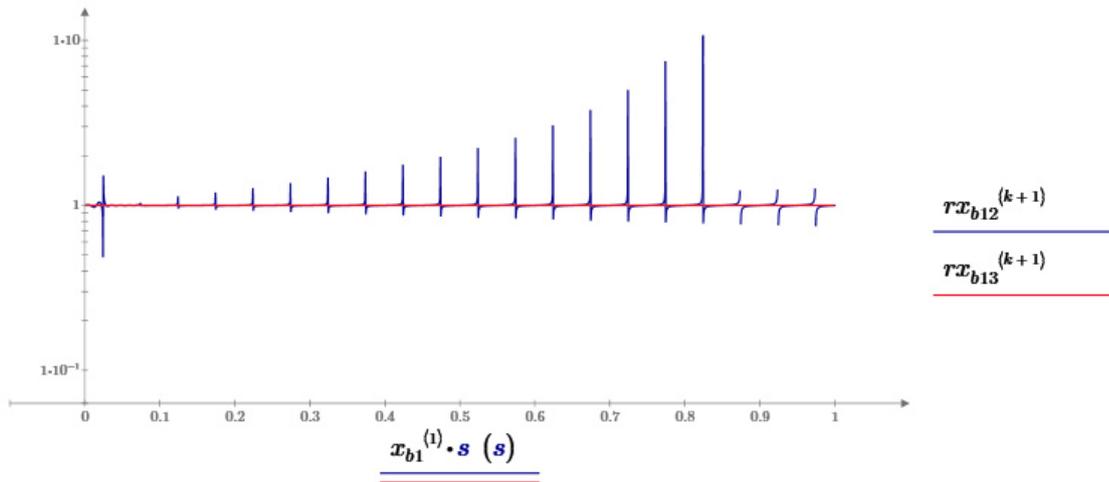


Abbildung 46: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 1

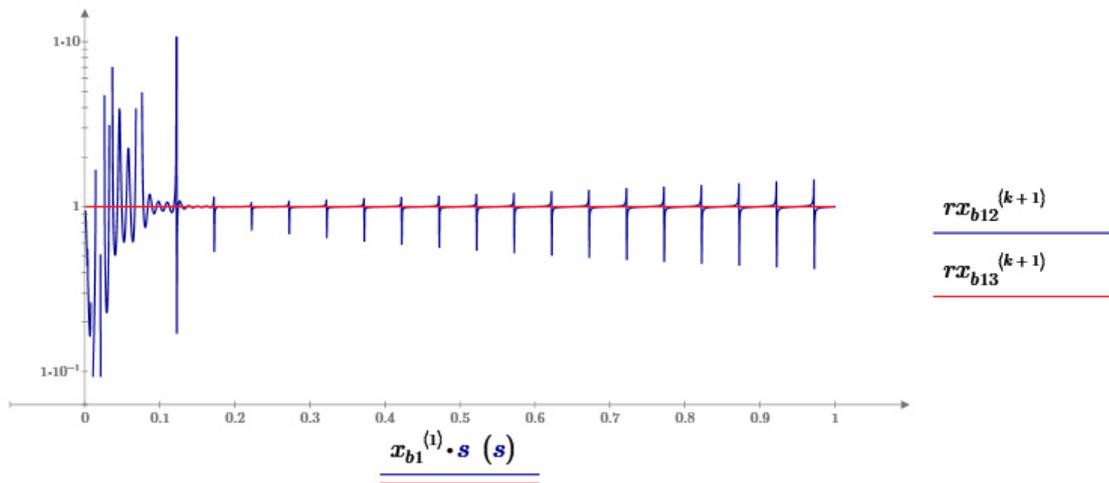


Abbildung 47: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 3

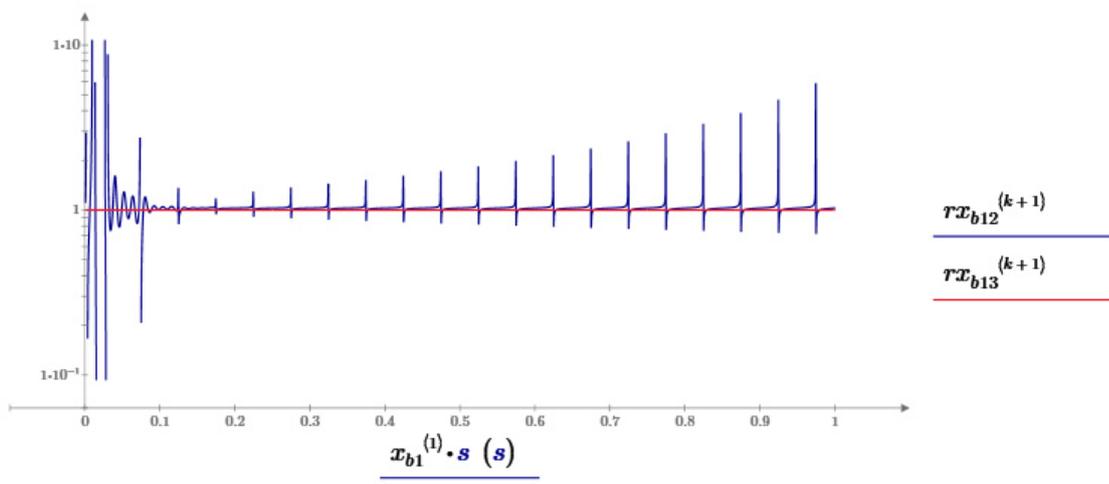


Abbildung 48: Verschiebungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 7

Der qualitative Vergleich der Biegespannungsverläufe zeigt ein ähnliches Bild wie bei den Verformungen. Während das direkte Verfahren und die Analyse mit der CMS Substruktur einen vergleichbaren Verlauf zeigen, sind bei der GUYAN Substruktur offensichtliche Abweichungen zu erkennen.

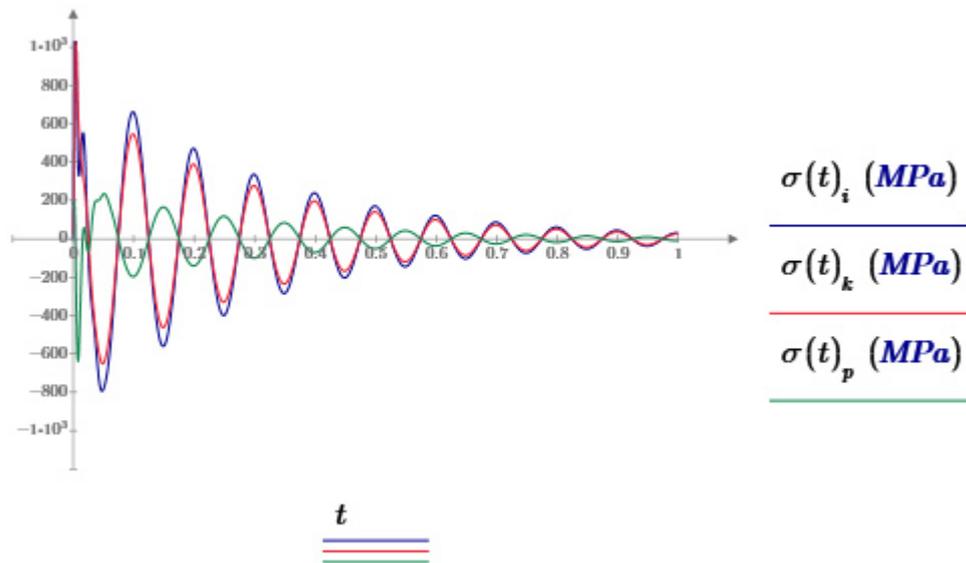


Abbildung 49: Biegespannungsverlauf - direktes Verfahren

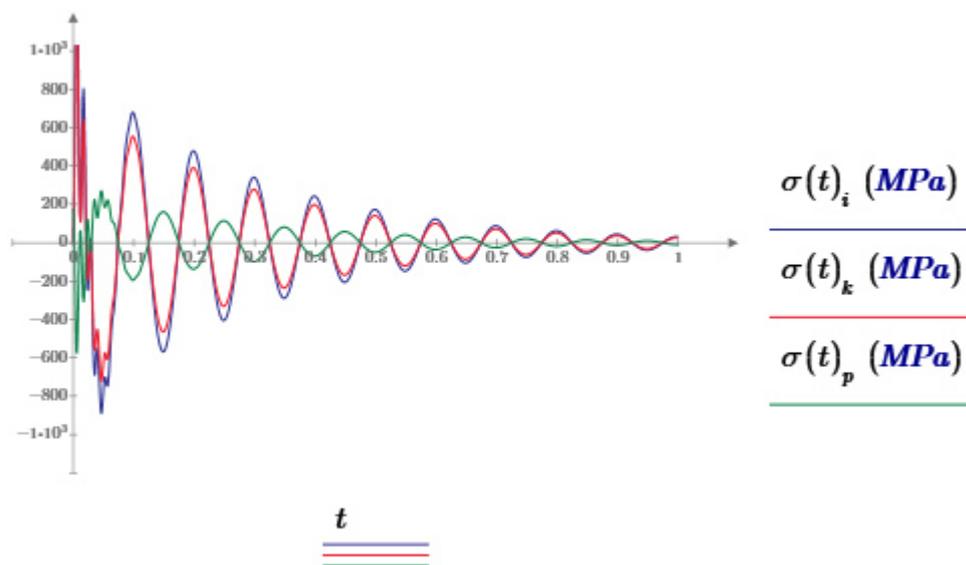


Abbildung 50: Biegespannungsverlauf - GUYAN Superelement

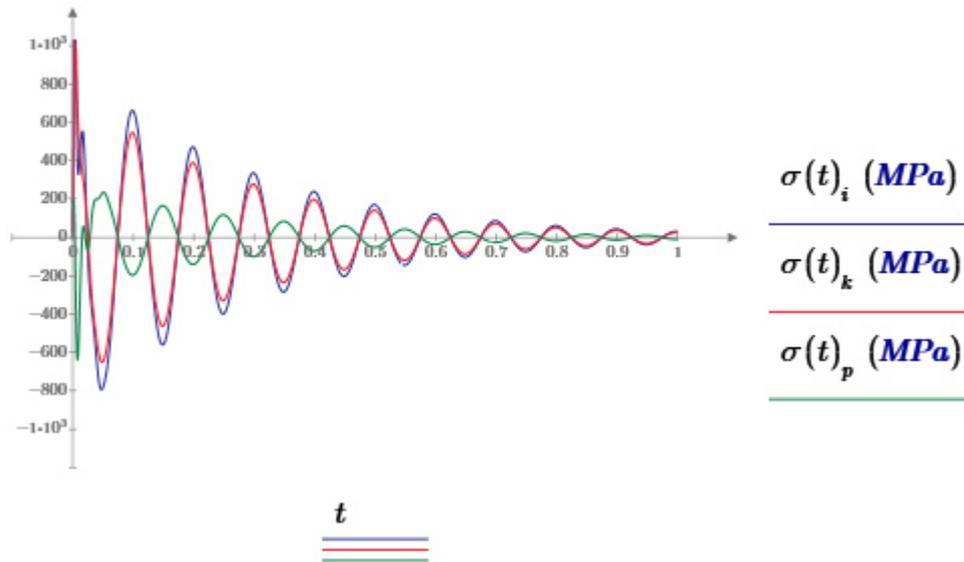


Abbildung 51: Biegespannungsverlauf - CMS Superelement ($n_q = 8$)

Der quantitative Vergleich erfolgt auch hier wieder durch das Bilden eines Verhältniswertes aus den Biegespannungen der Analyse mit dem direkten Verfahren σ_{b1} und dem Ergebnis des jeweils anderen Verfahrens σ_{bi} ²¹.

$$r\sigma_{b1i} = \frac{\sigma_{b1}}{\sigma_{bi}}$$

(99)

Erneut wird die Identität der Ergebnisse zwischen der direkten Analyse und der Analyse mit dem CMS Superelement - unter Berücksichtigung aller Moden der Substruktur ($n_q = 8$) - bestätigt. Die Ergebnisse des Berechnungsmodells mit dem GUYAN reduzierten Superelements hingegen weichen teilweise erheblich von denen der Referenzlösung ab. Speziell der Bereich der ersten Zehntelsekunde sticht hervor. Die höherfrequenten Eigenfrequenzen spielen hier eine Rolle. Im weiteren Verlauf ist der erste Eigenmode - dieser liegt bei 10Hz (siehe auch Tabelle 4) - in allen Abbildungen klar erkennbar. Trotz der identischen Eigenfrequenz von 10Hz beim ersten Eigenmode sind doch Abweichungen sowohl bei der Verschiebungsamplitude als auch bei der Amplitude der Biegespannungen vorhanden. Für die Auswahl der Masterfreiheitsgrade und die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenmoden bei der CMS Reduktion bedeutet dies, dass eine Beschränkung der Auswahlkriterien auf die Eigenwerte möglicherweise nicht ausreicht, um daraus Rückschlüsse auf die Genauigkeit abzuleiten. Als zusätzliches Kriterium könnte z. B. das MAC Kriterium (siehe Kapitel 4.4.2) herangezogen werden.

²¹ Der Index i steht für die Reduktionsmethode; 2 = statische Kondensation; 3 = Component Mode Synthese.

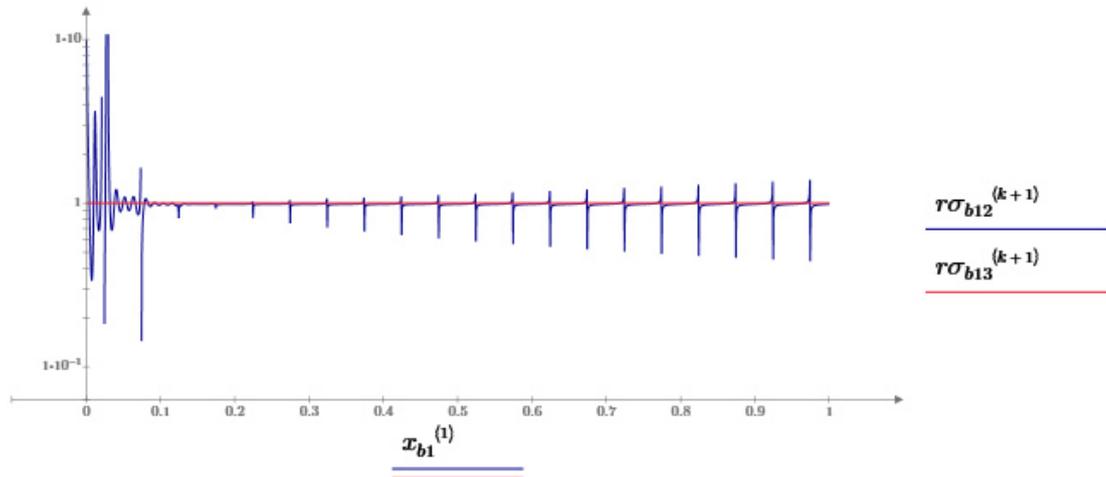


Abbildung 52: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 3

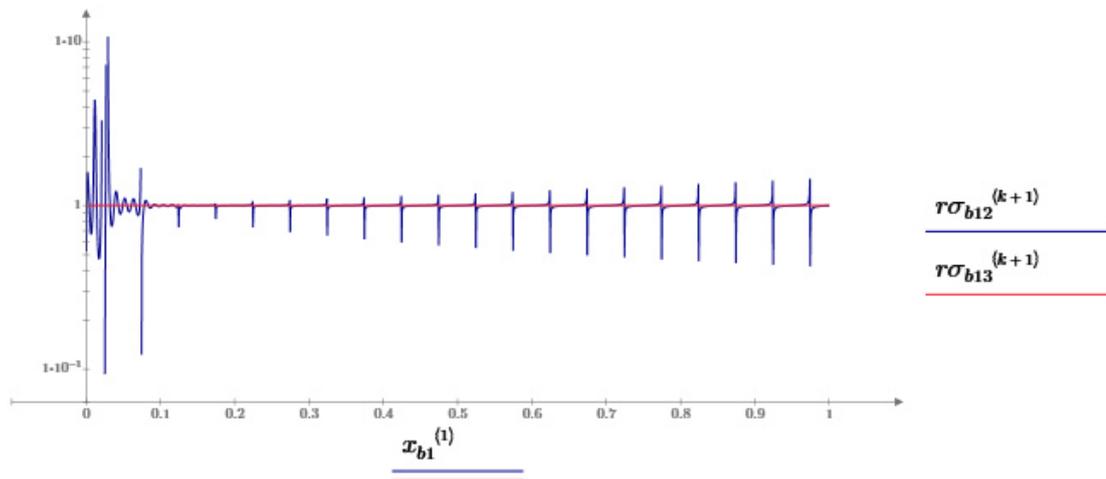


Abbildung 53: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 4

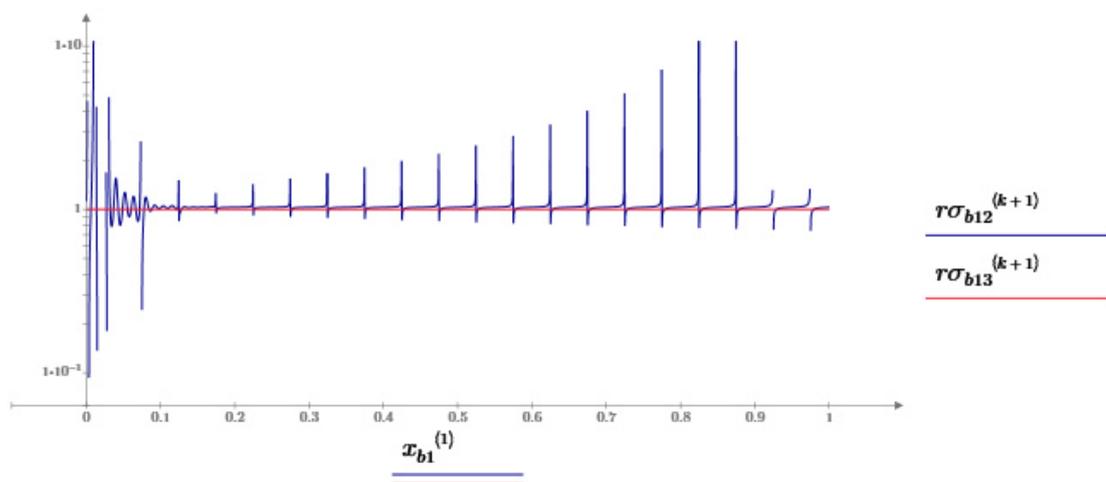


Abbildung 54: Biegespannungsverlauf - Vergleich der Ergebnisse am Knoten Nr. 10

6 Anwendungsbeispiel Kurbelwelle

Anhand der Kurbelwelle eines Verbrennungsmotors soll die Anwendung der Component Mode Synthese zur effizienten Analyse der Lebensdauer gezeigt und hinsichtlich ihrer praktischen Anwendung analysiert werden. Die Diskussion des Aufwandes und der Analysegenauigkeit im Vergleich zu dem Vorgehen bei der Analyse ohne CMS Reduktion nimmt eine zentrale Rolle in den Ausführungen ein.

Die dynamische Simulation des Bewegungsvorganges erfolgt mit der Mehrkörperdynamiksoftware RECURDYN V8R5²², die Lebensdaueranalyse mit der Software winLIFE²³ in der Version 4.0.2.

6.1 Beschreibung der Aufgabenstellung

Die Kurbelwelle eines 4-Zylinder Reihenmotors ist Gegenstand der Untersuchungen. Die Schädigung am Übergang des Hauptlagerzapfens zur Kurbelwange bei der Belastung durch die Gaskräfte eines Verbrennungszyklus soll berechnet werden.

Das Modell des Motors stammt aus der RECURDYN Beispielsammlung, welche in der Softwareinstallation enthalten und somit frei verfügbar ist. Ob diese Geometrie tatsächlich in dieser Form umgesetzt wurde, ist nicht bekannt, sie repräsentiert jedoch ein anschauliches Beispiel.

Die Kurbelwelle wird mit einer konstanten Drehzahl von $3000 \frac{1}{min}$ bewegt. Dabei überwinden die Gaskräfte ein vorhandenes Lastmoment. Diese Annahme entspricht zwar nicht den tatsächlichen Betriebsverhältnissen, da hier eine gewisse Drehmomentwelligkeit auftritt, für den beabsichtigten Zweck ist diese Vereinfachung jedoch vertretbar. Das Simulationsmodell entspricht daher eher einem virtuellen Prüfstand.

Abhängig von der Winkellage der Kurbelwelle erfolgt die Einbringung der Gaskräfte an den jeweiligen Kolben. Diese perfekte (kurbelwellenwinkelsynchrone) Lasteinleitung überbrückt alle in der Realität auftretenden dynamischen Effekte der Ventil- und Zündungssteuerung. Die Zuordnung der Kolben zu den Gaskraftkurven ist durch die Nummerierung in Abbildung 55 möglich.

²² Hersteller der Software RECURDYN ist FunctionBay Inc. (<http://www.functionbay.com>).

²³ Hersteller der Software winLIFE ist das Steinbeis Transferzentrum für neue Technologien in der Verkehrstechnik (<http://www.STZ-Verkehr.de>).

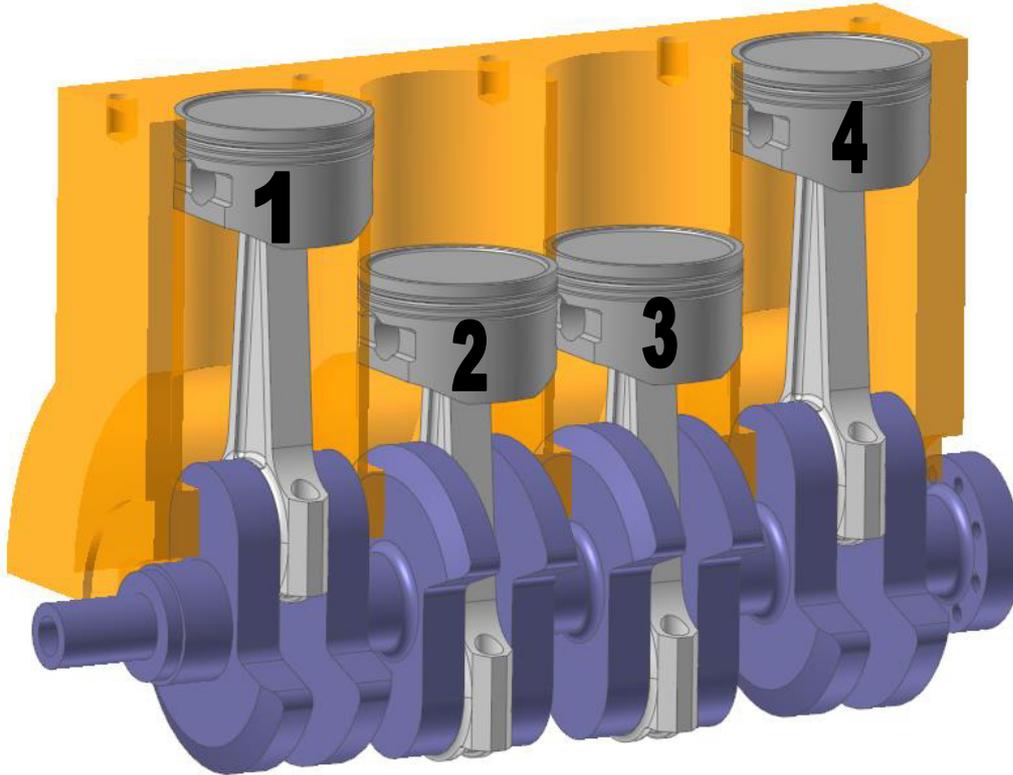


Abbildung 55: Schnittbild 4-Zylinder Reihenmotor mit Kolbenzuordnung



Abbildung 56: Zeitverlauf der Gaskräfte (K1 bis K4) für einen Verbrennungszyklus

Die Kurbelwelle wird als flexibles Element im Simulationsmodell abgebildet. Einerseits, um die dynamischen Eigenschaften des Bauteils selbst zu berücksichtigen, andererseits um die zur Ermüdungsfestigkeitsanalyse erforderlichen Spannungen zu berechnen. Die restlichen Komponenten werden als starr angenommen um die Komplexität der Analyse überschaubar zu halten. Weitere Vereinfachungen wurden bei der Art und Weise der

Lagerung der Kurbelwelle in den Hauptlagern sowie bei den Pleuellagern getroffen. Effekte aus der Schmierfilmverteilung nach der Reynolds-Gleichung wurden negiert. Sekundärbewegungen des Kolbens und ähnliche Effekte bleiben ebenso unberücksichtigt. Das Modell entspricht der von Köhler und Flierl definierten Kategorie eines Volumen-Modells der Kurbelwelle mit starren Hauptlagern ohne HD/EHD²⁴ ([KFV] S. 168).

Zur Ermittlung der Spannungen in der Kurbelwelle wird eine Mehrkörperdynamiksimulation (MBD²⁵) mit flexiblen Strukturen durchgeführt. Man spricht hier auch von flexibler Mehrkörperdynamik (MFBD²⁶). Die Software RECURDYN bietet die Möglichkeit, sowohl nach der Craig-Bampton Methode reduzierte Superelemente, als auch gesamte FEM-Strukturen im Berechnungsmodell zu verwenden. Der erstgenannte Fall wird als RFlex (reduced flexible), letztgenannter als FFlex (full flexible) bezeichnet.

Für den Vergleich der beiden Methoden wird ein relativ grobes FEM Modell verwendet. Die Diskretisierung genügt, um die dynamischen Eigenschaften der Struktur hinreichend genau abzubilden, jedoch nicht, um hinsichtlich der Spannungen konvergente Werte für die Lebensdaueranalyse zu liefern. Warum wird dieses Modell dennoch für den Vergleich verwendet? Mit der FFlex Variante ist es mit der vorhandenen Rechenleistung schlichtweg nicht möglich ein - für die folgende Lebensdaueranalyse - hinreichend fein diskretisiertes FEM Modell zu verwenden, um in wirtschaftlich vertretbarer Zeit Resultate zu erhalten. Genau dies ist der Vorteil der RFlex Methode, wie der Vergleich zeigen wird. Vor allem die höchst effiziente Kombination mit der Submodelltechnik (diese wird im Kapitel 6.5.4 beschrieben) untermauert die Eignung des Verfahrens zur Lebensdaueranalyse dynamischer Spannungen. (Hinweise zur Verwendung der Submodelltechnik bei der Spannungsanalyse von Kurbelwellen sind auch in [KFV] S. 167 enthalten).

Für die Lebensdaueranalyse ist es ein wesentliches Faktum, dass an der betrachteten Kerbe ein multiaxiales Problem vorliegt, und daher das Verfahren der kritischen Schnittebene zur Analyse angewandt wird. Der Spannungstensor-Zeitverlauf an zwei ausgewählten Knoten dient als Referenz. Eine winLIFE Analyse nach dem nichtlinear-transienten Verfahren (siehe Kapitel 3.1.2) wird für diese Nachweispunkte durchgeführt. Bei der dynamischen Simulation mit RFlex Komponenten genügt es, den Zeitverlauf der generalisierten Koordinaten und die korrespondierende Spannungsmatrix als modale Einheitslastfälle zu exportieren und in winLIFE das Verfahren der Superposition anzuwenden. In RECURDYN sind die generalisierten Koordinaten rein modale Koordinaten und die zugeordneten Spannungen also Spannungen der modalen Einheitslastfälle. Das zugrundeliegende Verfahren wird in den Kapiteln 3.1.1 und 3.1.3 beschrieben.

²⁴ HD = hydrodynamischer Schmierfilm; EHD = elasto-hydrodynamischer Schmierfilm

²⁵ MBD = Multi Body Dynamics

²⁶ MFBD = Multi Flexible Body Dynamics

Anzahl von 4-Knoten Tetraedern ergänzt. Die Lagerstellen werden durch RBE2 Rigid-Elemente mit der Struktur verbunden. Das Modell besteht aus insgesamt 27419 Knoten und 25367 Elementen.

Die Kurbelwelle besteht aus dem Werkstoff Stahl mit den Materialkennwerten:

- Elastizitätsmodul $E = 200000\text{MPa}$
- Schubmodul $G = 77820\text{MPa}$
- Dichte $\rho = 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

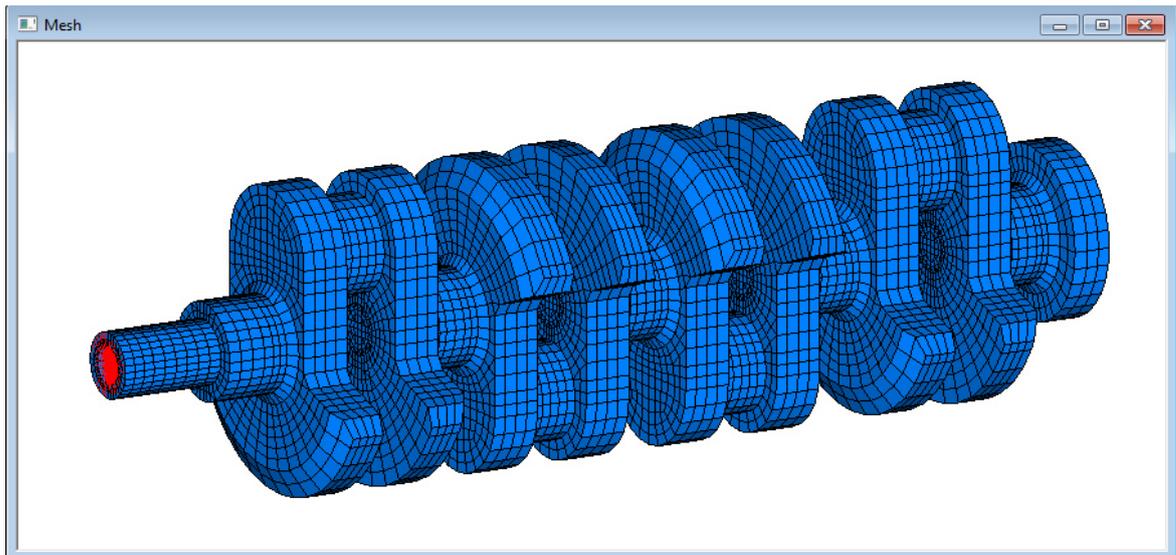


Abbildung 58: FE-Netz der Kurbelwelle

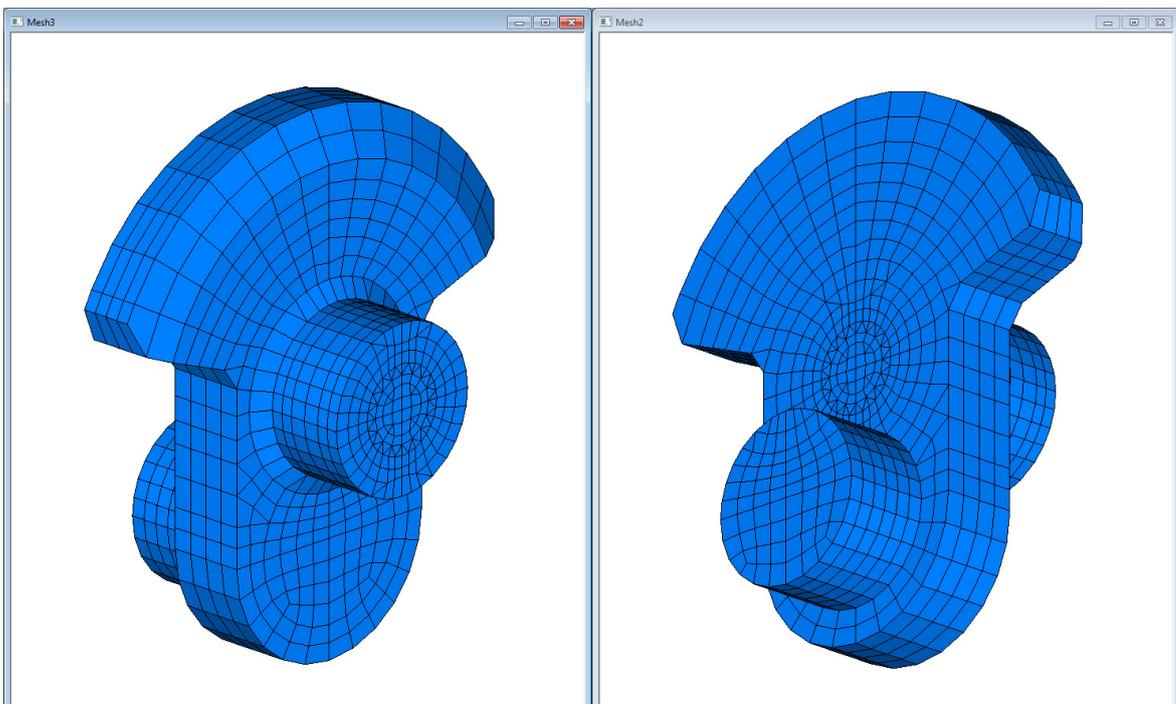


Abbildung 59: Detailansichten FE-Netz Kurbelwelle

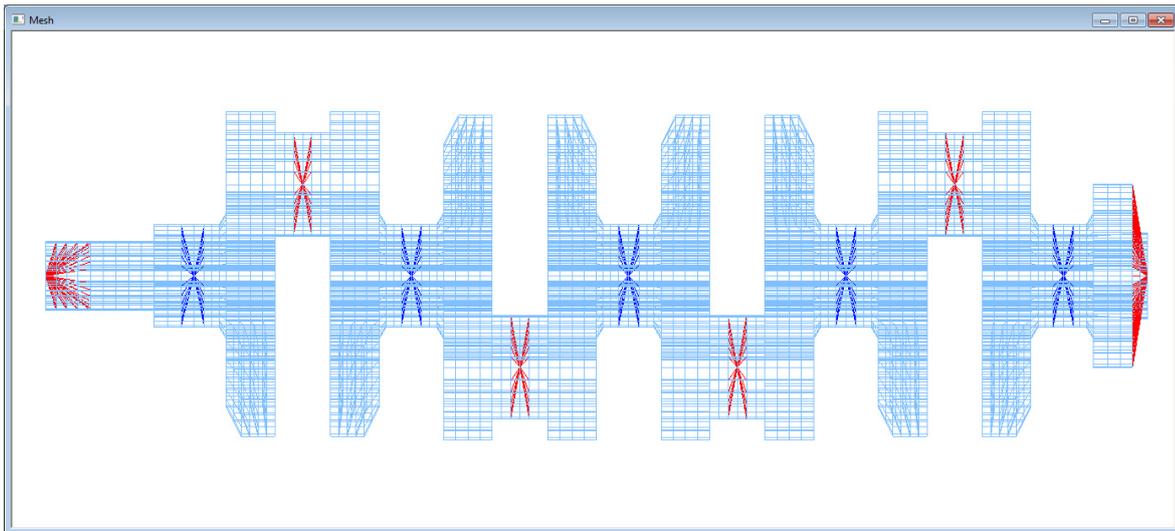


Abbildung 60: RBE2 Anbindung der Lagerstellen (Interface Nodes)

Das Submodell des Kurbellenausschnitts besteht aus insgesamt 45398 Knoten und 42162 Elementen. Der Radius am Übergang des Hauptlagerzapfens zur Kurbelwange wurde entsprechend fein diskretisiert, um eine hinreichend genaue Abbildung der Kerbspannungen zu erreichen.

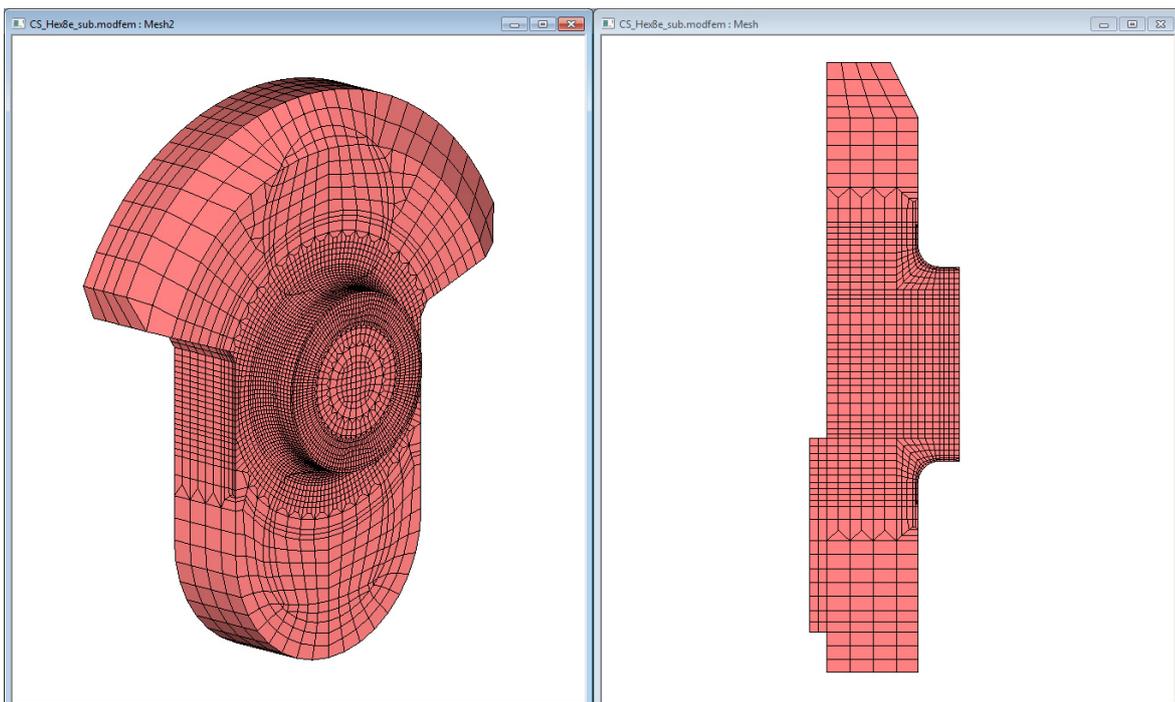


Abbildung 61: FE-Netz Submodell des Kurbellenausschnitts

Die Methode der Submodelltechnik wird in Kapitel 6.5.4 beschrieben.

6.3 CMS Reduktion und Modalanalyse der Kurbelwelle

Die ersten vergleichenden Betrachtungen betreffen die Abbildung der Kurbelwelle selbst. Zu diesem Zweck wurde eine Modalanalyse der Struktur zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und der Eigenvektoren durchgeführt. Als Gleichungslöser wird die FEM Software NX NASTRAN v11²⁸ (Lösungssequenz SOL103) verwendet.

Als Referenz für die Reduktion mit der CMS Methode dient die Lösung nach dem direkten Verfahren. Die ersten 40 Moden sind gesucht, wobei der Frequenzbereich mit 10kHz begrenzt wird. Es wird eine freie Modalanalyse ohne Randbedingungen durchgeführt. Die sechs Starrkörpermoden werden im Vergleich nicht berücksichtigt.

Die Masterfreiheitsgrade der Superelemente sind die 6 DOFs der in Abbildung 60 dargestellten (insgesamt 11) Schnittstellenknoten (Interface Nodes). Es werden insgesamt 4 Modellvarianten der CMS Reduktion erstellt. Dabei wird die Anzahl der bei der Reduktion berücksichtigten Moden variiert. Mit diesen kondensierten Strukturen wurde ebenfalls die freie Modalanalyse entsprechend der Referenzlösung durchgeführt.

Tabelle 5: Modellvarianten der Kurbelwelle

Bezeichnung	FULL	CMS10	CMS20	CMS30	CMS40
CMS Moden	-	10	20	30	40
Freiheitsgrade	82290	76	86	96	106

Die CMS Reduktion wird entsprechend der „fixed boundary“ Methode durchgeführt (siehe Kapitel 4.1.5). Die Einheitsverschiebungen der Masterfreiheitsgrade (an den Schnittstellenknoten) bilden den ersten Teil der Transformationsmatrix, welcher durch die inneren Moden der Struktur (bei fixierten MDOFs) ergänzt wird. Die Schwingformen der ersten zehn inneren Moden (Fixed Base Mode Shapes) sind in Abbildung 62 und Abbildung 63 dargestellt. Durch die Festhaltung der Interfaceknoten bilden die internen Moden Schwingformen der Kurbelwangen ab. Die Frequenzen dieser Moden liegen über 4kHz.

Bei den Schwingformen der Gesamtstruktur ist keine Festhaltung vorhanden. Die Biege- und Torsionsschwingungen der Struktur treten in den Vordergrund. Die Frequenz des ersten Modes liegt bei 353.6Hz. Abbildung 64 und Abbildung 65 zeigen die ersten zehn Eigenformen der Berechnungsvariante „FULL“. Der Frequenzbereich bis 2kHz wird mit diesen Moden abgedeckt.

Neben den Verschiebungsvektoren der Eigenwerte wurden auch die daraus resultierenden Spannungen berechnet, da diese für die spätere Verwendung bei der Lebensdaueranalyse als „Modale Spannungen“ benötigt werden.

²⁸ Hersteller der Software NX NASTRAN ist Siemens Product Lifecycle Software Inc. (<https://www.plm.automation.siemens.com>).

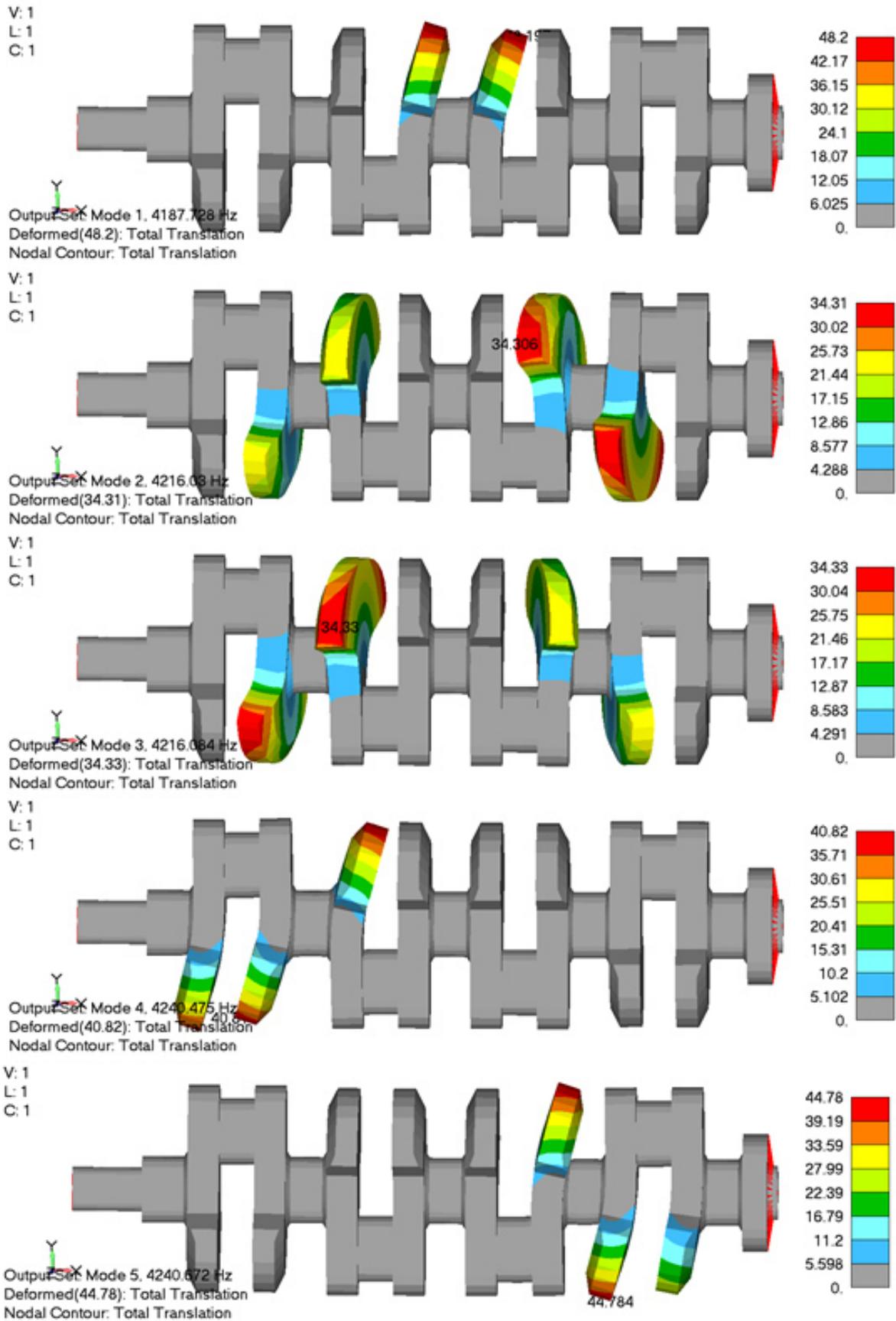


Abbildung 62: Fixed Base Mode Shapes Nr. 1 bis 5

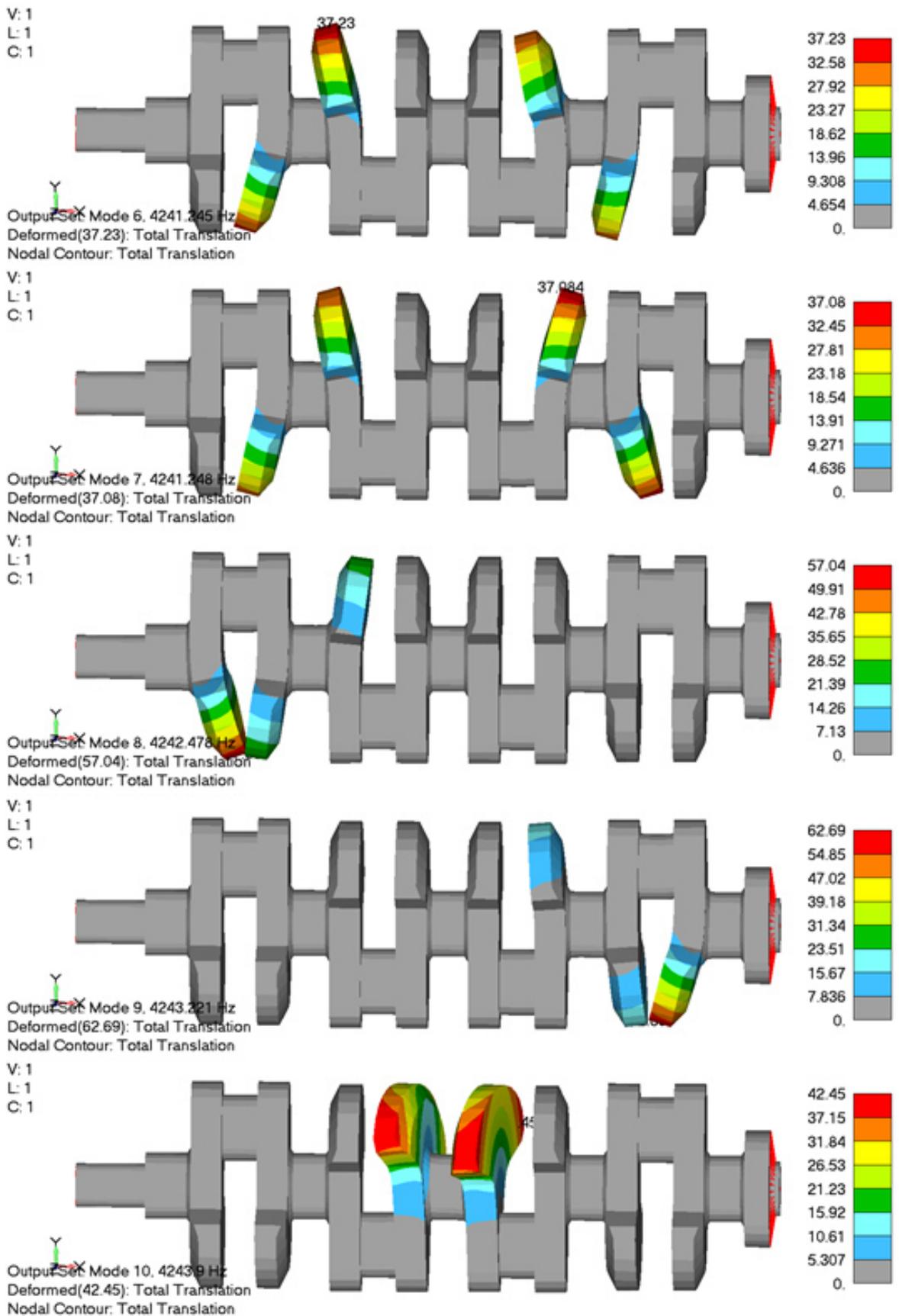


Abbildung 63: Fixed Base Mode Shapes Nr. 6 bis 10

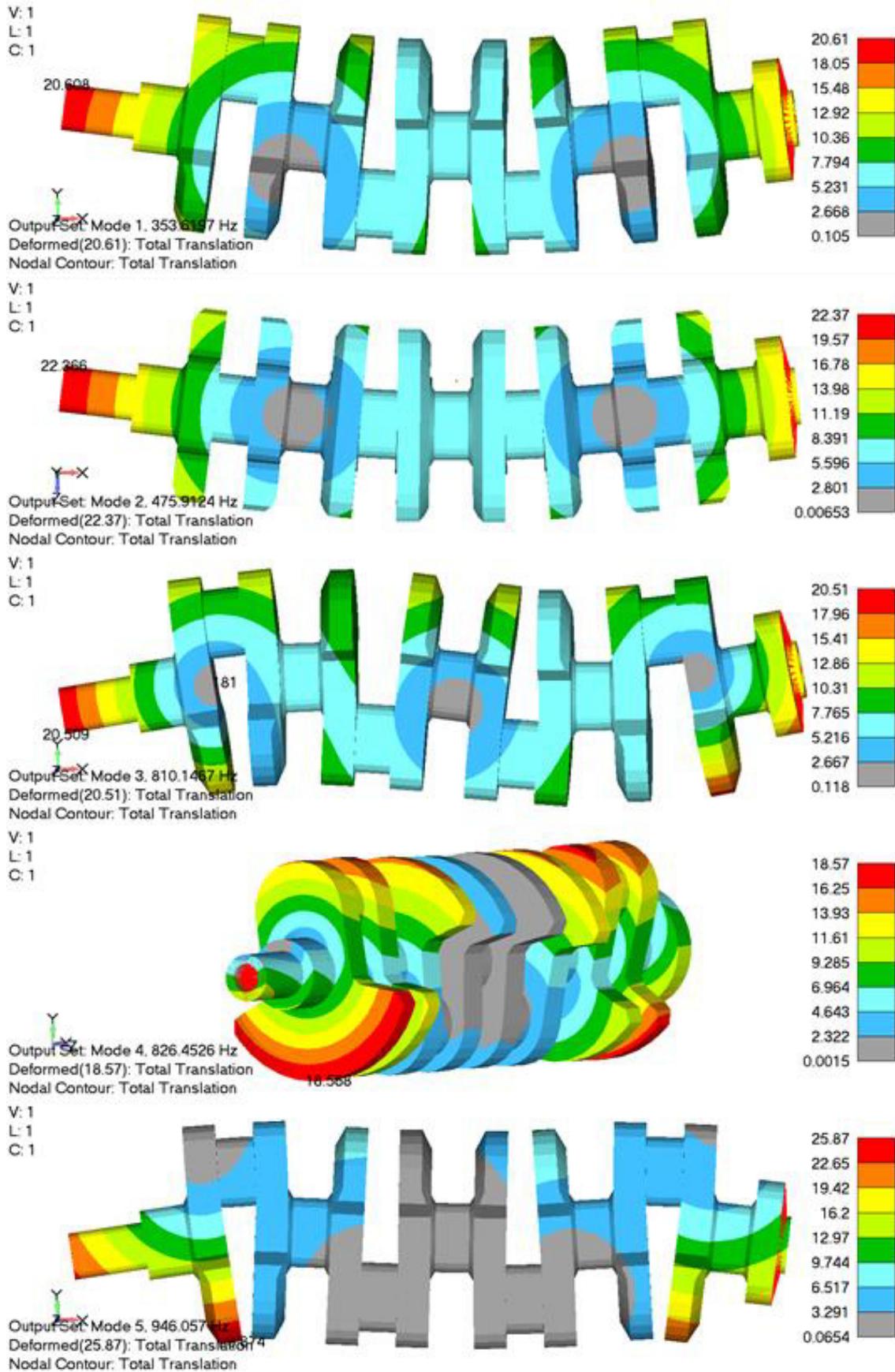


Abbildung 64: Eigenformen der Kurbelwelle Nr. 1 bis 5

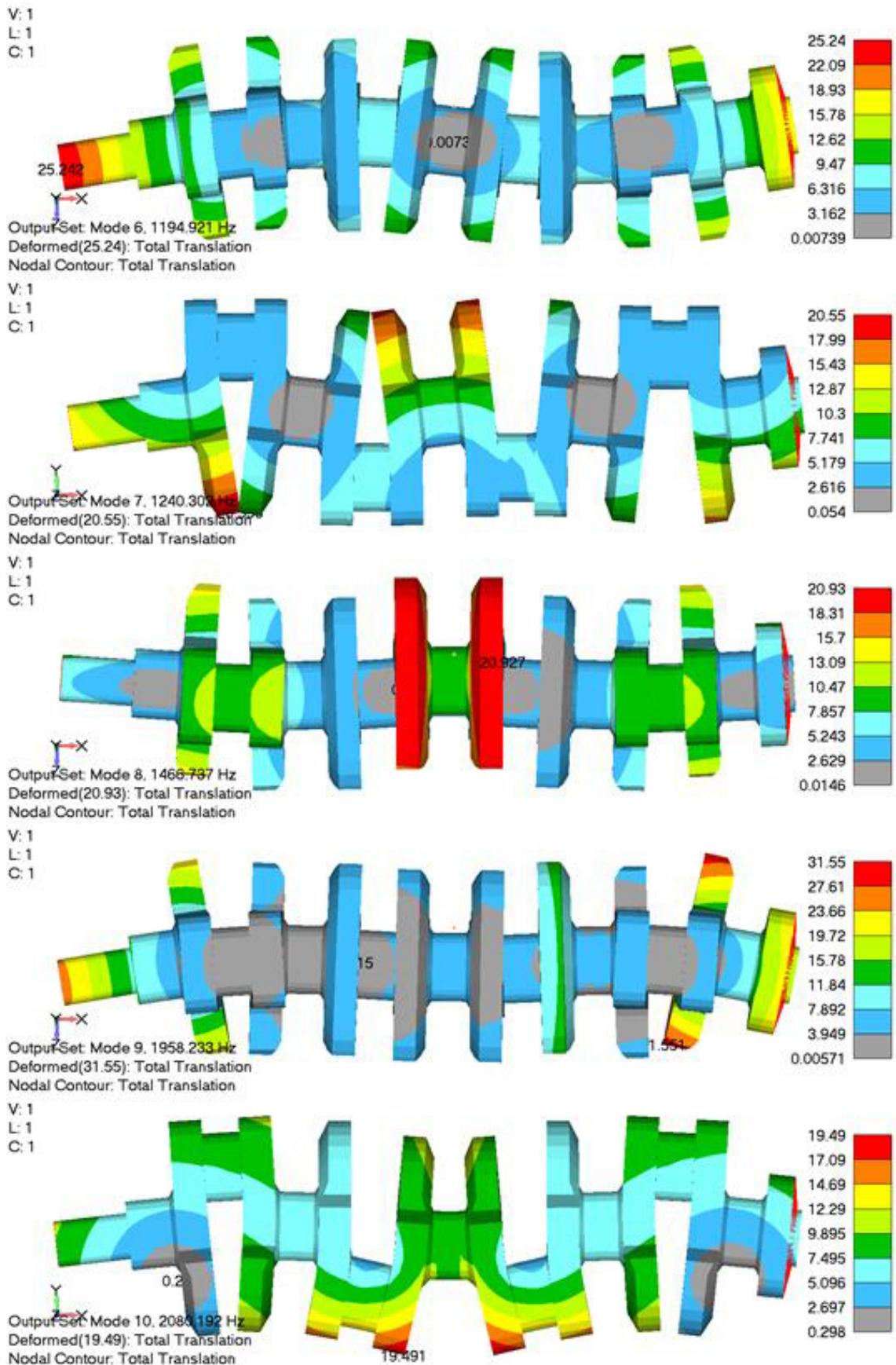


Abbildung 65: Eigenformen der Kurbelwelle Nr. 6 bis 10

Die Eigenfrequenzen für den gesamten analysierten Bereich über alle Modellvarianten enthält Tabelle 6.

Tabelle 6: Berechnete Eigenfrequenzen der Kurbelwelle [Hz]

Mode Nr.	FULL	CMS10	CMS20	CMS30	CMS40
1	353.6	353.7	353.7	353.7	353.6
2	475.9	476.3	476.2	476.0	476.0
3	810.1	810.9	810.9	810.8	810.3
4	826.5	831.3	827.1	826.6	826.6
5	946.1	946.6	946.6	946.5	946.3
6	1194.9	1203.7	1198.9	1196.5	1196.5
7	1240.3	1241.3	1241.3	1241.1	1240.7
8	1466.7	1505.3	1472.3	1467.8	1467.8
9	1958.2	2031.4	1962.1	1960.5	1960.5
10	2080.2	2098.3	2097.5	2087.7	2084.5
11	2086.4	2160.4	2101.4	2096.8	2087.7
12	2385.7	2415.2	2397.5	2386.8	2386.8
13	2501.5	2576.0	2516.4	2507.4	2507.4
14	2848.1	2880.6	2880.5	2879.0	2851.6
15	2860.1	2899.5	2898.8	2896.4	2864.0
16	3188.3	3430.0	3199.9	3199.4	3199.4
17	3279.4	3451.7	3284.8	3284.3	3284.3
18	3437.2	3585.3	3451.7	3451.6	3438.3
19	3523.0	3715.1	3584.2	3537.4	3537.4
20	3559.1	4156.9	3631.3	3584.2	3561.0
21	4219.8	4501.6	4221.1	4221.0	4220.0
22	4462.8	4766.6	4501.7	4500.3	4466.0
23	4628.6	5792.2	4651.4	4641.8	4641.8
24	4669.9	6318.9	4678.0	4675.8	4675.8
25	4673.2	6514.9	4695.3	4687.6	4687.6
26	4684.2	6647.3	4775.7	4754.5	4697.2
27	4858.4	7717.1	5682.7	4873.3	4873.3
28	4898.0	7930.1	5710.2	4912.2	4912.2
29	5290.7	8190.4	5792.8	5341.3	5341.3
30	5494.5	9065.3	6319.3	5581.3	5581.3
31	5592.9	9118.6	6515.0	5715.8	5669.7
32	6004.6	9498.4	6616.3	6105.7	6105.7
33	6218.8	9520.0	6836.0	6304.0	6249.5
34	6353.4	9656.7	7483.7	6505.8	6382.5
35	6393.4		7860.1	6665.6	6665.6
36	7010.6		8077.2	7234.9	7234.9
37	7165.3		9121.7	7337.0	7294.5
38	7414.2		9155.3	7746.3	7560.9
39	7501.4		9519.9	7932.8	7807.1
40	7721.2		9555.0	8359.6	7826.9

Wie der Tabelle 6 entnommen werden kann, wurden bei der Variante CMS10 nur 34 Moden unterhalb 10kHz berechnet. Bei allen anderen Varianten wird das Maximum von 40 Moden ermittelt. Aus den Werten der Tabelle einen Vergleich anzustellen, bedarf der Anwendung von Bewertungskriterien entsprechend Kapitel 4.4. Zur Berechnung der Vergleichskriterien wurde die Software Mathcad 15.0 M20²⁹ verwendet.

Die erste Bewertung erfolgt nach dem „Natural Frequency Difference“ Kriterium (NFD), entsprechend den Erläuterungen in Kapitel 4.4.1 bzw. nach Gleichung (94). Der Hauptdiagonalplot der NFD Matrizen - jede Reduktionsvariante wurde mit der Referenzlösung verglichen - ist in Abbildung 66 dargestellt.

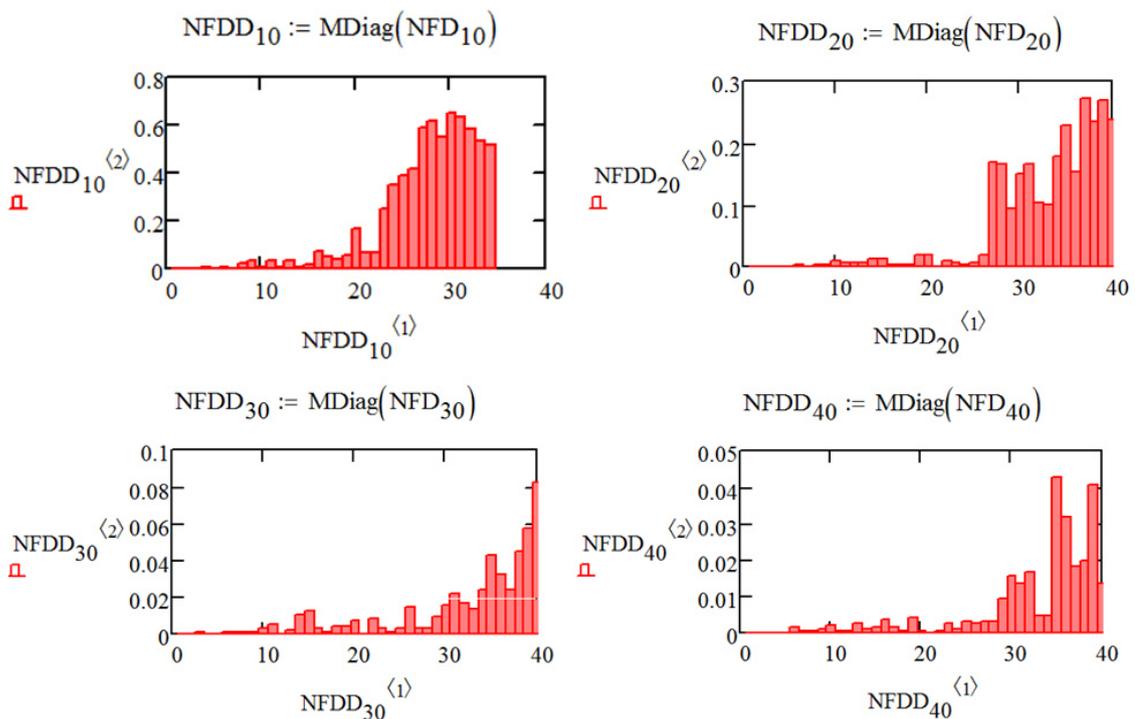


Abbildung 66: NFD Kriterium - Hauptdiagonalelemente der Matrizen

Aus den Diagrammen ist ersichtlich, dass bei der Variante CMS10 deutliche Unterschiede ab dem 16. Mode (ca. 3200Hz) vorhanden sind. Es liegt die Vermutung nahe, dass bei den darüberliegenden Frequenzen nicht zusammenpassende Schwingformen verglichen werden. Eine Überprüfung mit dem MAC Kriterium erscheint daher nicht nur sinnvoll, sondern notwendig. Mit zunehmender Modenzahl der CMS Reduktion steigt die Abbildungsgenauigkeit, was durch den sinkenden NFD Wert ersichtlich ist. Der NFD Wert der Variante CMS40 bleibt im untersuchten Frequenzbereich unter 5%.

Eine bessere Überprüfung ist mit dem „Modal Assurance Criterion“ (MAC) möglich (siehe Kapitel 4.4.2 bzw. Gleichung (95)). Die Matrixdarstellung (Abbildung 67) ermöglicht eine

²⁹ Hersteller der Software Mathcad ist Parametric Technology Corporation Inc. (<http://www.ptc.com>)

Zuordnung der Moden mit einer Aussage über die Korrelation des jeweiligen Modenpaares.

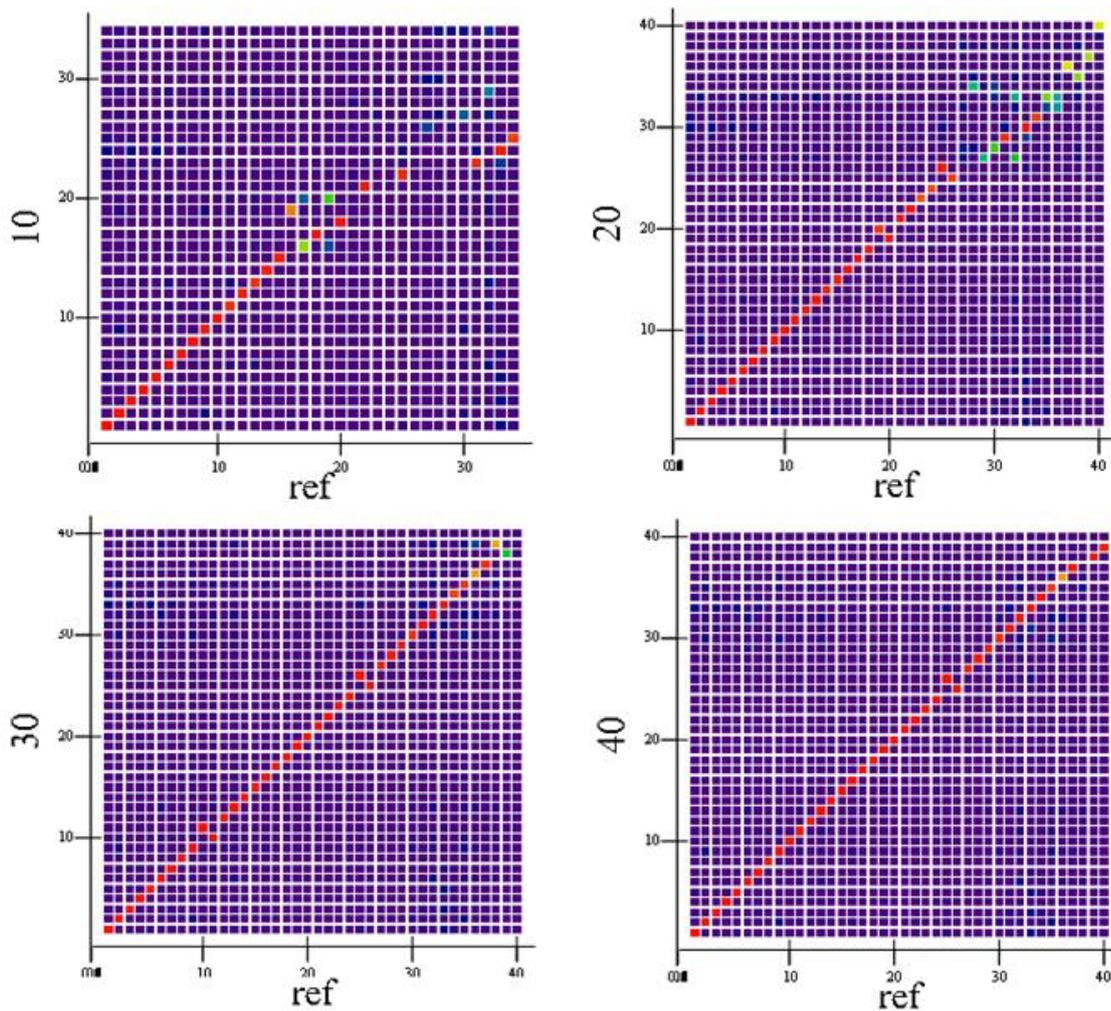


Abbildung 67: MAC Kriterium - Matrix Plot

Die Matrizendarstellung bestätigt die Vermutung, dass bei Variante CMS10 ab Mode Nr. 16 keine direkte Korrelation der beim NFD Kriterium dargestellten Moden vorhanden ist. Im Bereich über 3200Hz (Mode Nr. 16) ist nur mehr vereinzelt eine gute Zuordnung erkennbar.

Etwas besser ist die Situation bei CMS20. Bis zur 26. Eigenform (ca. 4600Hz) passen die Schwingformen gut zueinander. Bei den Modenpaaren (19/20) und (25/26) kann eine Vertauschung der Reihenfolge abgelesen werden, die Eigenfrequenzen liegen hier nah bei einander. Im Frequenzbereich darüber ist auch hier keine gute Korrelation vorhanden.

Bei den Varianten CMS30 und CMS40 zeigt sich eine gute Übereinstimmung über fast den gesamten Frequenzbereich. Lediglich im Bereich über 7000Hz treten Abweichungen auf. Die Vertauschung der Modenreihenfolge bei einzelnen Paaren ist ebenfalls erkennbar.

Die Darstellung der Hauptdiagonalelemente im Säulendiagramm zeigt die Größe des MAC Wertes für die jeweiligen Modenpaare gleicher Indizes.

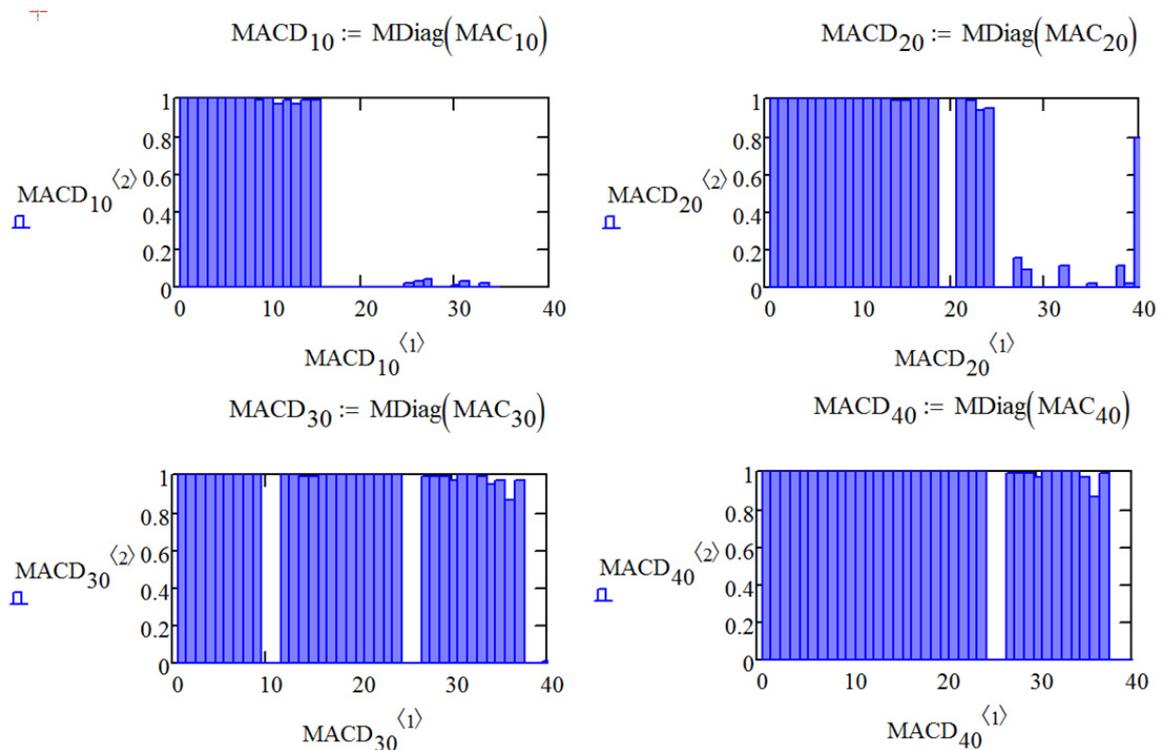


Abbildung 68: MAC Kriterium - Hauptdiagonalelemente der Matrizen

In den zuvor identifizierten Bereichen guter Korrelation der jeweiligen Modellvarianten wird durchgehend ein MAC Wert von nahezu Eins erreicht. Das Kriterium für „gute“ Korrelation liegt entsprechend den Empfehlungen von Dresig und Holzweißig bei $MAC_{i,j} > 0.8$ ([DHM] S. 378). Die zu erkennenden Lücken (bei den Varianten CMS20, CMS30 und CMS40) betreffen die zuvor erwähnten Modenpaare mit vertauschter Reihenfolge in der Frequenztafel. Diese Modenpaare weisen alle einen MAC Wert größer als 0.969 auf, eine gute Korrelation liegt also auch hier vor.

Die durchgeführten Untersuchungen bestätigen die bei der theoretischen Diskussion der Reduktionsverfahren angestellten Überlegungen, dass mit zunehmender Anzahl an CMS Moden die Abbildungsgenauigkeit steigt. Welche Anzahl der Moden bei der Reduktion nun für den geplanten Anwendungsfall berücksichtigt werden sollte, hängt von der Belastungs- bzw. Betriebssituation ab. Diese Diskussion wird im Zuge der Verwendung der Kurbelwelle bei der MKS-Simulation im folgenden Kapitel geführt.

6.4 Mehrkörperdynamiksimulation

Bereits bei der Beschreibung der Aufgabenstellung in Kapitel 6.1 wurde auf die getroffenen Vereinfachungen im Simulationsmodell hingewiesen. Der Fokus der Analysen liegt ja auf dem Vergleich der Reduktionsverfahren mit der vollständigen Lösung und nicht auf

6.4.2 Flexible Abbildung der Kurbelwelle

6.4.2.1 Full Flexible Structure (FFlex)

Das in Kapitel 6.2 beschriebene Modell der FEM Kurbelwelle wird in RECURDYN ohne Änderungen übernommen. Die NASTRAN Modelldatei (*.dat, *.bdf, etc.) kann direkt eingelesen werden. Bei den Materialeigenschaften wird eine Dämpfung in der Form einer steifigkeitsproportionalen Dämpfung definiert. Dieser Dämpfungsfaktor entspricht dem β Koeffizienten der Raleigh Dämpfung (siehe Gleichung (63)). Um den Einfluss der Dämpfung zu untersuchen wurden zwei Varianten analysiert:

- Variante **d1**: $\beta_1 = 1 \cdot 10^{-4}$
- Variante **d2**: $\beta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$

6.4.2.2 Reduced Flexible Structure (RFlex)

Um einen RFlex Körper in RECURDYN zu verwenden, muss eine CMS Reduktion des FEM Modells durchgeführt werden. Die Reduktion kann direkt mit NX NASTRAN oder mit dem RECURDYN internen Modul RFlexGen durchgeführt werden. Die Informationen zur reduzierten Struktur werden in einem sogenannten RFI File (*.rfi) gespeichert. Es wird jedoch nicht die Transformationsmatrix, wie in Gleichung (79) beschrieben, hinterlegt, sondern - analog der in Kapitel 6.3 beschriebenen Vorgehensweise - eine freie Modalanalyse der CMS Substruktur durchgeführt und die Moden als generalisierte Koordinaten - entsprechend dem Vorgehen bei der modalen Analyse (Kapitel 4.1.3) - zur Beschreibung verwendet. Zusätzlich enthält die RFI Datei die sogenannten Stress- und Strain Shapes. Dies sind die zu den jeweiligen Eigenvektoren zugehörigen Verzerrungen und Spannungen, also die bereits rücktransformierte Spannungsmatrix (siehe Gleichung (91)). Detaillierte Informationen zur Erstellung von RFI Dateien sind im NX Nastran „Advanced Dynamic Analysis User’s Guide“ [NXN1] Kap. 7 und in der RECURDYN Hilfe [RD1] Kap. RFlex enthalten.

Der Anwender hat nun für jede RFlex Komponente im Modell die Möglichkeit eine Subauswahl der bei der Simulation zu berücksichtigenden Moden zu treffen. Diese Moden werden im Folgenden als RFI Moden bezeichnet. Die einzelnen Moden sind voneinander entkoppelt, daher kann die Dämpfung für jeden Mode individuell festgelegt werden (siehe Kapitel 4.1.3). Diese beiden Optionen ermöglichen eine differenzierte Vorgehensweise bei der Einstellung des Simulationsmodells, vor allem wenn Messdaten über das modale Verhalten der Komponente vorliegen (siehe Abbildung 71).

Bei allen RFlex Modellen wurden, analog den getroffenen Einstellungen des FFlex Modells, zwei Dämpfungsvarianten **d1** und **d2** - analysiert.

Seq	Sel	Freq.	Damping Ratio
4	<input type="checkbox"/>	0.00	1.89567644731435e-007
5	<input type="checkbox"/>	0.00	2.04067370609037e-007
6	<input type="checkbox"/>	0.00	2.528638157225034e-007
7	<input checked="" type="checkbox"/>	354.47	0.1113614827839294
8	<input checked="" type="checkbox"/>	476.86	0.1498110485451453
9	<input checked="" type="checkbox"/>	812.27	0.2551806671877682
10	<input checked="" type="checkbox"/>	826.60	0.2596852816472959
11	<input checked="" type="checkbox"/>	948.92	0.2981117324285017

Abbildung 71: RFlex Auswahl der Moden mit Dämpfungswerten in RECURDYN

Die bereits in Kapitel 6.3 aufgeworfene Fragestellung, wie viele Moden bei der CMS Reduktion berücksichtigt werden sollen, kann nun dahingehend erweitert werden, dass die Anzahl der verwendeten Moden der MFB D Simulation (diese werden im Folgenden als RFI Moden bezeichnet) nicht mit der Anzahl der „Fixed Base Mode Shapes“ (CMS Moden) übereinstimmen muss.

Wie bereits bei der Erläuterung der modalen Analyse (Kapitel 4.1.3) sowie der CMS Reduktion (Kapitel 4.1.5) angemerkt wurde, wird in der Praxis die Faustformel benützt, den doppelten Frequenzbereich der Anregung für die internen Moden der CMS Reduktion zu verwenden. Wie sieht nun im vorliegenden Fall die Anregungsfrequenz aus?

Die Drehzahl von $n = 3000 \frac{1}{min}$ entspricht einer Frequenz von 50Hz. Je Umdrehung erfolgen zwei Kraftstöße, die Anregungsfrequenz liegt also bei 100Hz. Da durch die elastische Deformation der Kurbelwelle in Kombination mit der vorhandenen Drehgeschwindigkeit weitere Frequenzen angeregt werden, erscheint der Ansatz, die CMS Moden nach der Anregungsfrequenz zu bemessen, nicht zielführend.

Stattdessen wurde eine alternative Überlegung angestellt. Aus ersten MKS Simulationen wurde eine stabile Schrittweite von $5.55 \cdot 10^{-5}s$ ermittelt. Die höchste damit darstellbare Frequenz hat die vierfache Periodendauer $T = 2.22 \cdot 10^{-4}s$. Dies entspricht einer Frequenz von $f = 4500Hz$.

Folgende Modellvarianten werden analysiert, um die Auswirkung der CMS Moden in Kombination mit der Anzahl der verwendeten RFI Moden zu untersuchen.

Tabelle 7: Modellvarianten mit Anzahl der RFI Moden (modale DOFs)

Bezeichnung	RFI Moden (Bereich)	Anzahl der CMS Moden			
		10	20	30	40
RFlex_e%%	Alle	58	68	78	88
RFlex_e%%r1	bis 10000 Hz	32	46	48	50
RFlex_e%%r2	bis 4500 Hz	20	21	21	21

Anm.: Der Platzhalter %% in der Bezeichnung steht für die jeweilige Anzahl der CMS Moden.

6.4.3 Ergebnisse der dynamischen Simulation

Die MKS Analyse mit den flexiblen Strukturen liefert als Ergebnis den Zeitverlauf der Freiheitsgrade sowie den Verlauf der aufgebrachtten Kräfte und der Reaktionskräfte. Abbildung 72 zeigt die Kraftvektoren sowie die Deformation der Kurbelwelle (relativ zum Knoten des Hauptlagers Nr. 5) zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt.

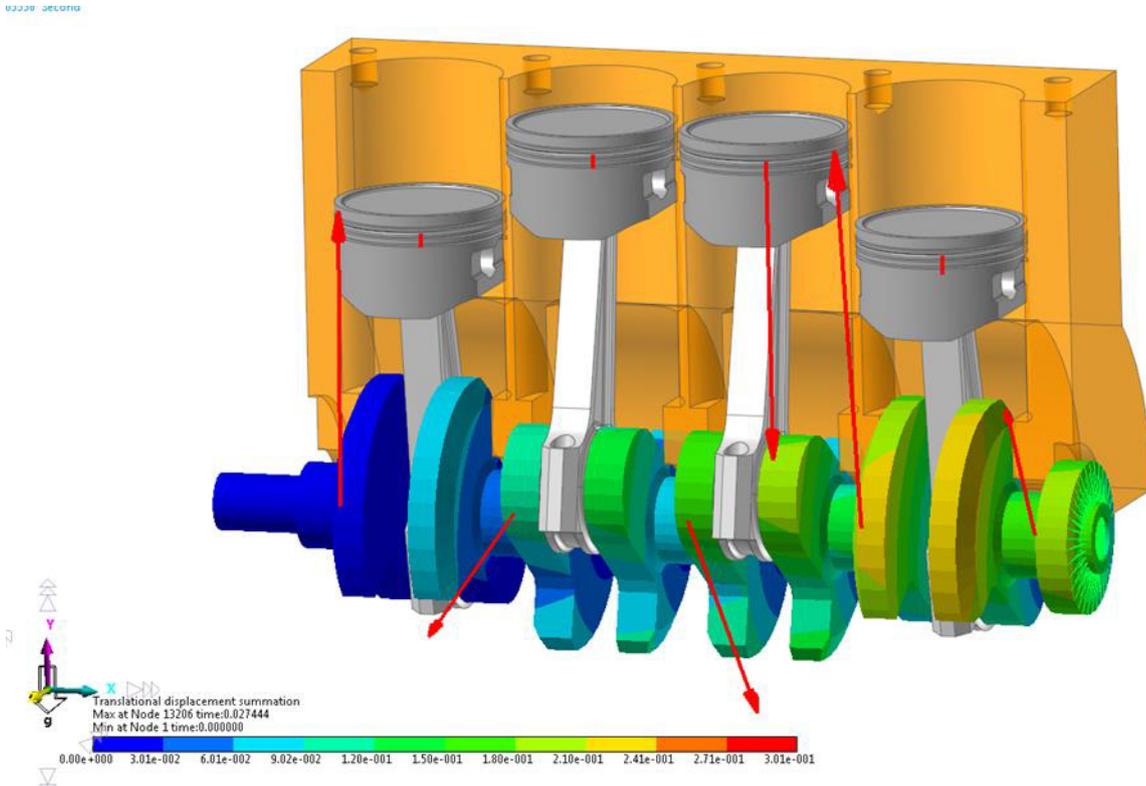


Abbildung 72: Contourplot der Deformation der Kurbelwelle mit Gas- und Lagerkräften

6.4.3.1 Rechenzeit

Die Ergebnisse der FFlex Berechnung dienen als Referenz für die Beurteilung der RFlex Modellvarianten, wobei der rechnerische Aufwand um ein Vielfaches höher liegt. Die Gegenüberstellung der Rechenzeiten³⁰ erfolgt anhand der Dämpfungsvariante **d1**.

Tabelle 8: Vergleich der Rechenzeiten (CPU time) bei der MKS Simulation [s]

Bezeichnung	FULL	CMS10	CMS20	CMS30	CMS40
RFlex_e%%	12068	10.18	12.4	14.9	17.25
RFlex_e%%r1		6.7	7.14	8.35	8.98
RFlex_e%%r2		4.71	5.2	4.98	4.99

³⁰ Hardware mit 2 Stk. Intel XEON Hex-Core Prozessoren mit 3.46 GHz Taktfrequenz. Analyse mit 8 Cores.

Die RFlex Analysen führen zu einer Rechenzeiterparnis um das 700 bis 2500fache! Doch nicht nur das Verhältnis der Rechenzeiten ist relevant, sondern auch deren absoluter Wert. Die Dauer von 12068s der FFlex Lösung entspricht 3 Stunden und 21 Minuten Rechenzeit. Eine Analyse realer Hochlaufvorgänge und Betriebsszenarien (mit einer Vielzahl von Verbrennungszyklen) ist aufgrund der zu erwartenden langen Rechenzeiten nicht umsetzbar. Die RFlex Methode hingegen scheint für diese Zwecke aus der Sicht des Zeitbedarfs geeignet.

6.4.3.2 Verlauf der modalen Koordinaten

Im nächsten Schritt wird der Frage nach der erforderlichen Anzahl an RFI Moden nachgegangen. Zu diesem Zweck wurde für jede Analyse der Verlauf der modalen Koordinaten exportiert und als 3D-Contourplot dargestellt.

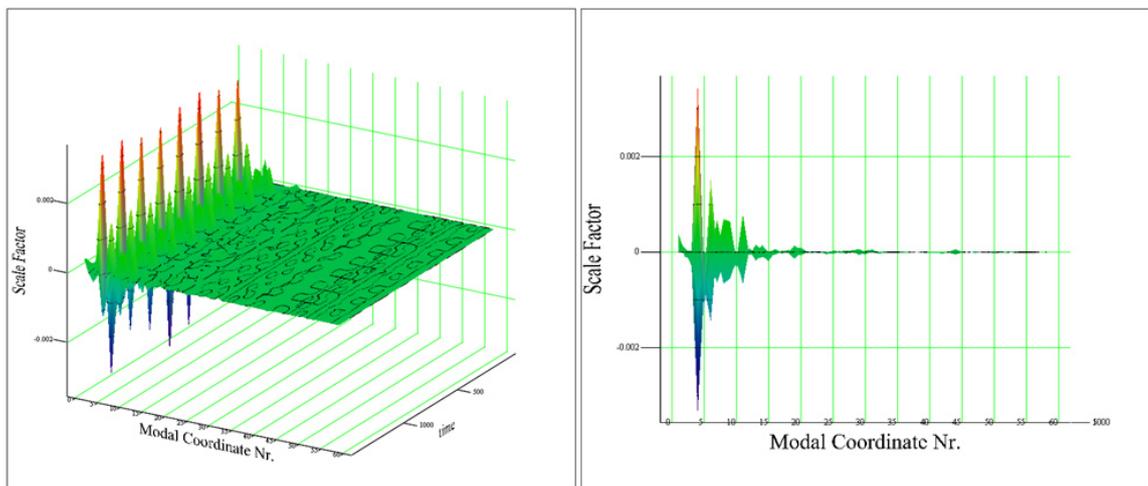


Abbildung 73: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e10_d1

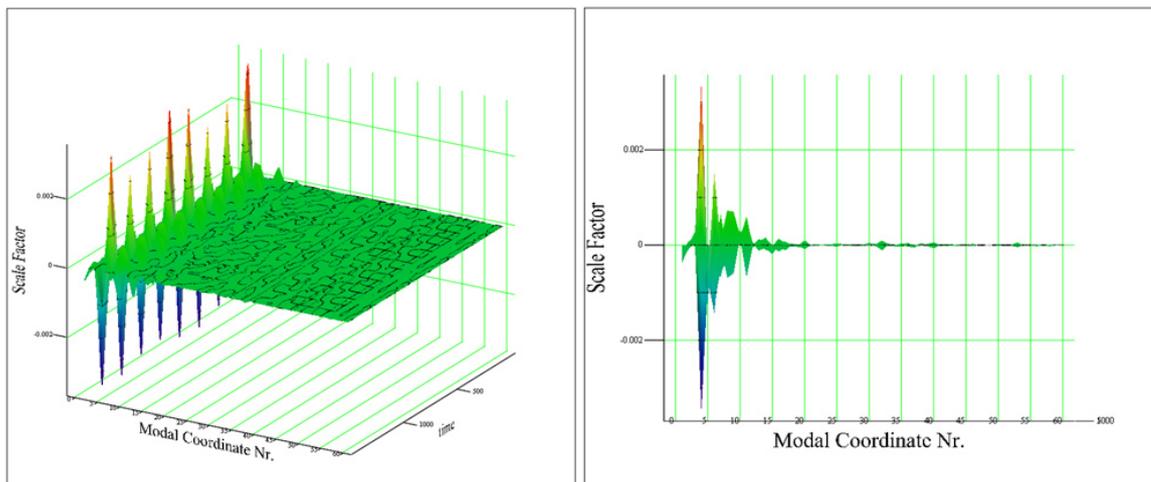


Abbildung 74: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e20_d1

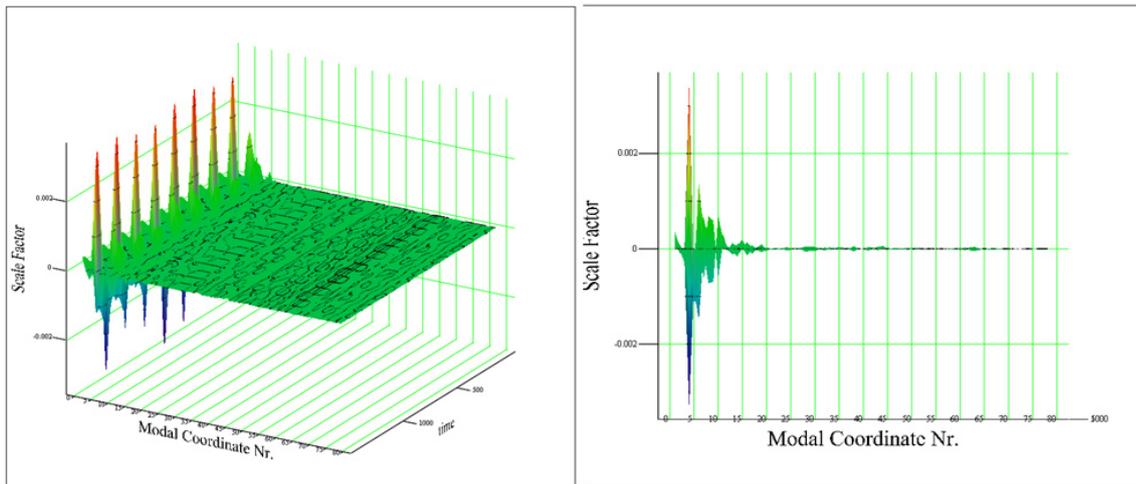


Abbildung 75: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e30_d1

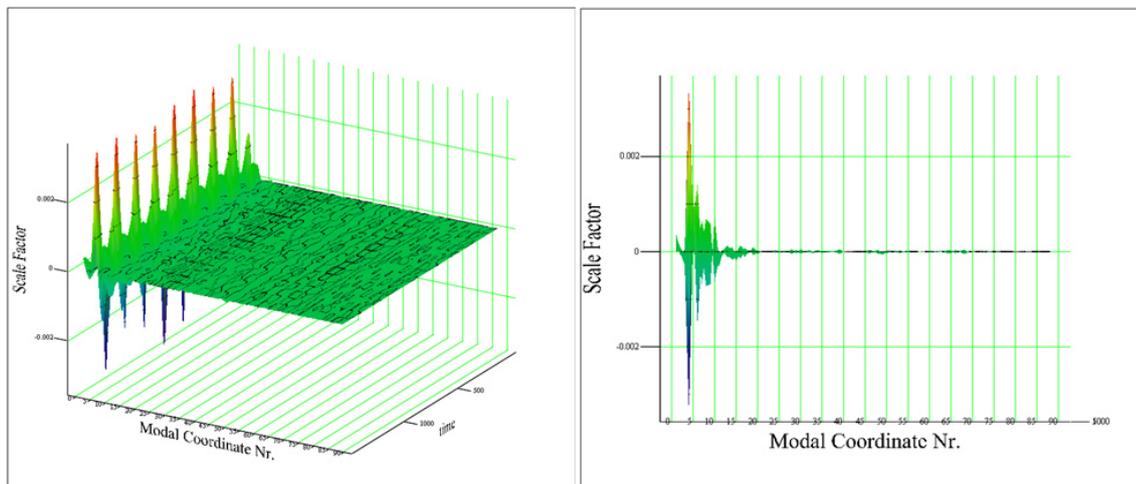


Abbildung 76: Verlauf der modalen Koordinaten - Modell: RFlex_e40_d1

Wie aus den Abbildungen des Verlaufs der modalen Koordinaten aller vier CMS Varianten mit Berücksichtigung aller RFI Moden hervorgeht, tragen bei allen Varianten die modalen Koordinaten mit einer Nummer größer als ~ 20 kaum zur Bildung des Gesamtergebnisses bei. Dies bestätigt die Annahme, dass die Beschränkung auf den Frequenzbereich bis 4500Hz - wie Tabelle 7 zu entnehmen ist, entspricht dies der Modenanzahl 20 bzw. 21 - für die Simulation ausreichend sein dürfte.

6.4.3.3 Verlauf der Spannungen

Für die Bewertung des transienten Spannungsverlaufs wurden zwei Knoten definiert, die im Bereich der Übergangskerbe des Hauptlagerzapfens zur Kurbelwange liegen. Der Radius am Übergang des Hauptlagers Nr. 3 zur Kurbel Nr.2 wurde dafür ausgewählt. Die beiden Knoten haben die Nummern 911 und 912. Die Lage der Knoten auf der Kurbelwelle ist in Abbildung 77 dargestellt.

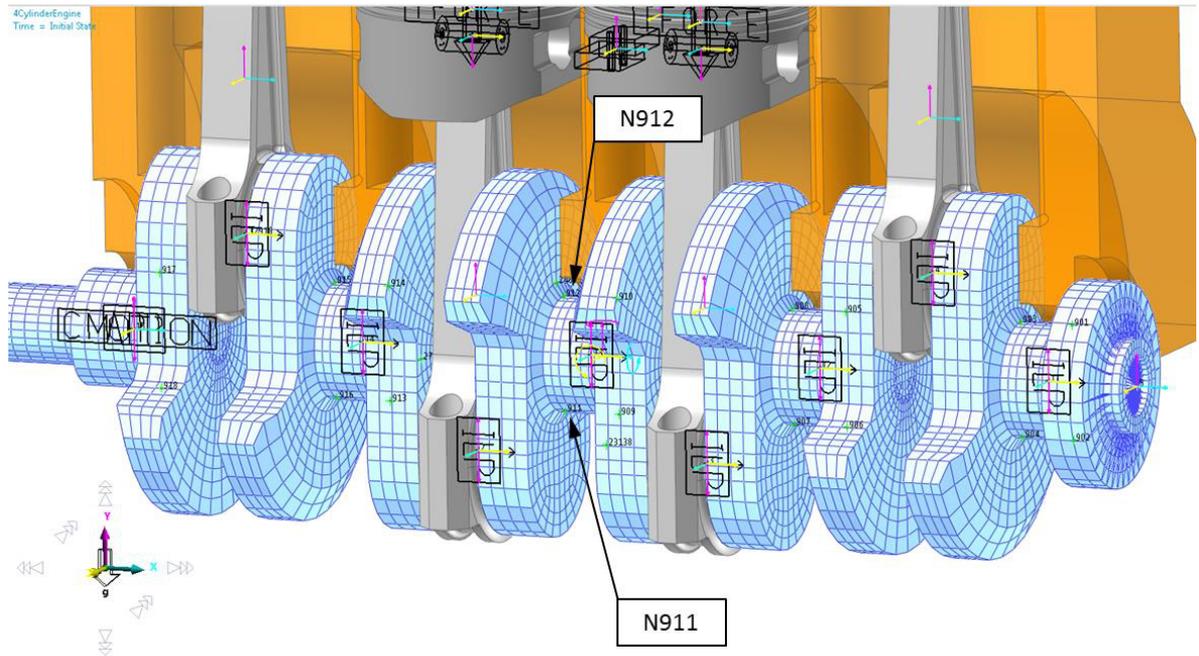


Abbildung 77: Lage der Auswerteknoten (N911/N912)

Wie sehen nun die Ergebnisse der mit der FFlex Methode ermittelten Referenzlösungen an den ausgewählten Knoten aus? Der Verlauf des Spannungstensors würde zwar eine vollständige Information liefern, ein einfacher Vergleich zwischen den Varianten ist jedoch nur schwer möglich. Die v. Mises Vergleichsspannung (SEQV) wird deshalb zu diesem Zweck verwendet.

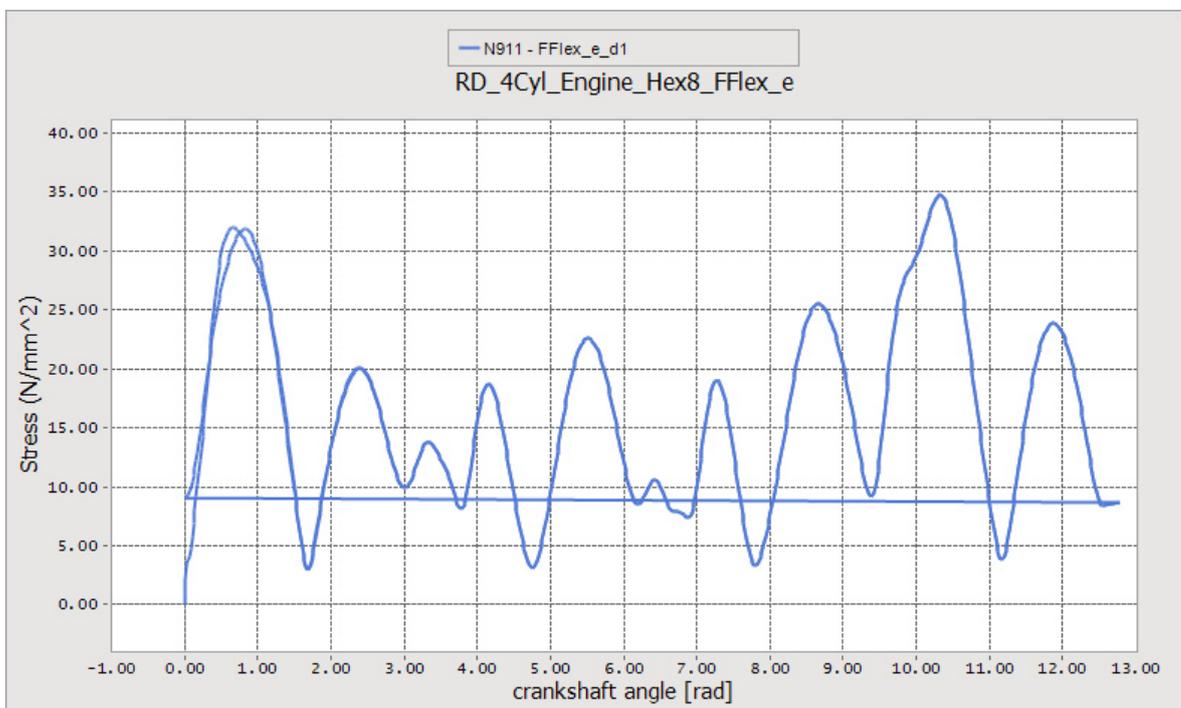


Abbildung 78: SEQV vs. Angle - N911 – FFlex_e_d1

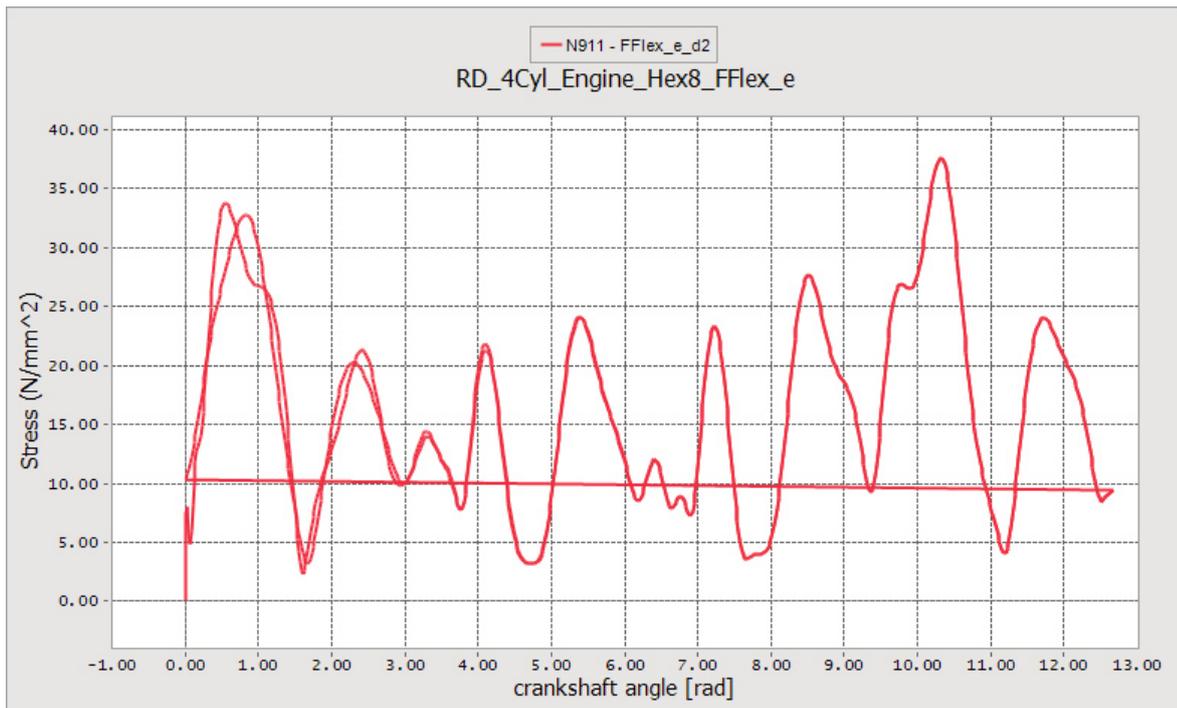


Abbildung 79: SEQV vs. Angle - N911 – FFlex_e_d2

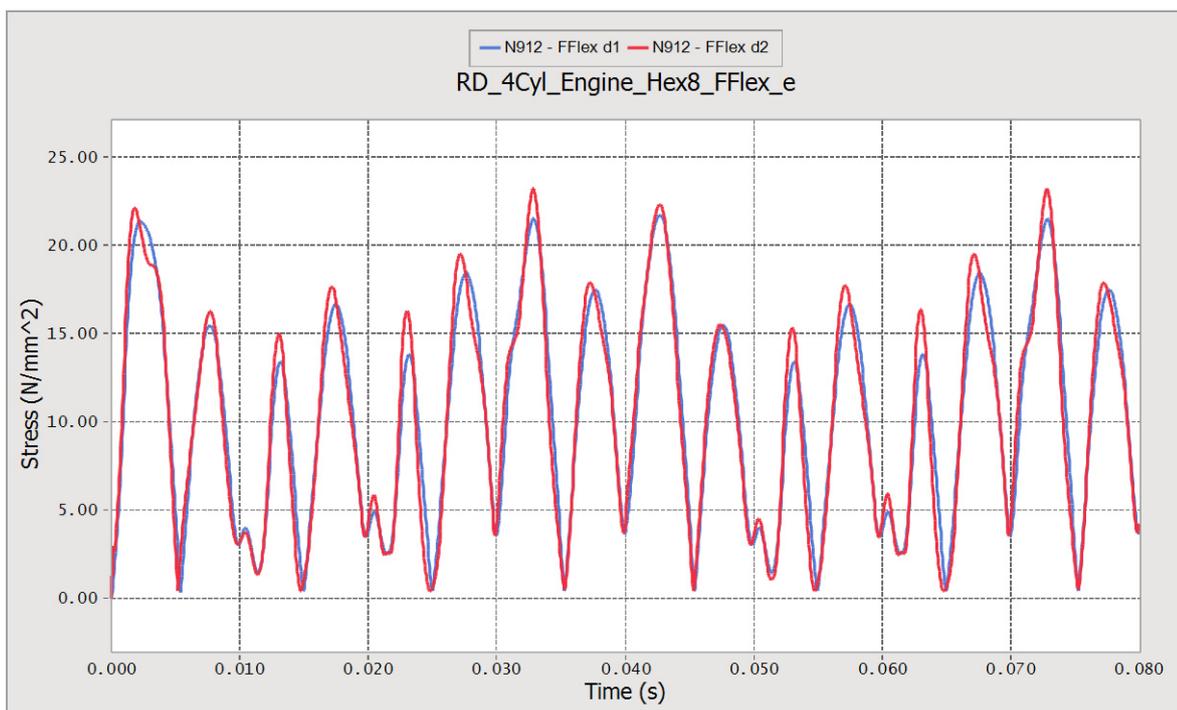


Abbildung 80: SEQV vs. Time - N912 – FFlex_e_d1 und d2

Der Verlauf der v. Mises Vergleichsspannung (SEQV) am Knoten Nr. 911, der FFlex Variante **d1**, wird in Abbildung 78 über die Winkellage der Kurbelwelle dargestellt. Die Abweichungen bei der ersten Spannungsamplitude zeigt anschaulich den Effekt des „Einschwingens“ und bestätigt die gewählte Vorgehensweise, insgesamt zwei Verbrennungszyklen zu simulieren. Bei der Dämpfungsvariante **d2** dauert der Einschwingvorgang

deutlich länger. Die Kurven verlaufen erst nach ca. $1\frac{1}{2}$ Umdrehungen deckungsgleich (siehe Abbildung 79). Aus dem Verlauf der Kurven bei geringer Dämpfung kann der Einfluss der geringeren Dämpfung auf das Schwingungsverhalten (erkennbar z. B. durch die Stufe bei ca. 10rad) festgestellt werden.

Für den Knoten Nr. 912 werden die beiden Kurven in einem Graphen, jedoch über der Zeit dargestellt um die Abweichungen besser erkenntlich zu machen (Abbildung 80). Auch hier ist die Auswirkung der Dämpfung - vor allem durch die höheren Spannungsamplituden bei geringerer Dämpfung - klar erkennbar.

Der Darstellung der Abweichungen der RFlex Varianten zu den FFlex Referenzlösungen dienen die folgenden Abbildungen (Abbildung 81 bis Abbildung 84). Aus der Vielzahl der Lösungsvarianten werden ein paar herausgegriffen. Der vollständigen Abbildungssatz ist im Anhang Teil 1 enthalten.

Bei den Modellvarianten mit 10 CMS Moden sind beim Knoten Nr. 911 (Abbildung 81) deutliche Unterschiede in der Höhe der Spannungsamplituden - abhängig von der Anzahl der RFI Moden - auszumachen. Die Spannungsspitzen liegen dabei teilweise um 50% höher als bei der Referenzlösung. Beim Knoten Nr. 912 (Abbildung 82) liegen die Resultate der RFlex Lösungen innerhalb eines engeren Streubands. Die maximale Abweichung liegt hier jedoch auch bei immerhin ca. 25%.

Wird die Substruktur basierend auf 40 CMS Moden verwendet, so ist beim Knoten Nr. 911 (Abbildung 83) eine Verringerung der Streubandbreite der RFlex Lösungen erkennbar. Beim Knoten Nr. 912 (Abbildung 84) verschiebt sich die Abbildungsgenauigkeit von den direkt den Gaskraftimpulsen folgenden Amplituden hin zu den Gegenamplituden.

Unabhängig von der Anzahl der CMS Moden kann festgestellt werden, dass die Vergleichsspannungsamplituden, die direkt dem Gaskraftimpuls zuzuordnen sind, besser getroffen werden, als die Gegenamplitude der Schwingung. (Hier sei angemerkt, dass im Vergleichsspannungsplot das Vorzeichen der Gegenamplitude der Hauptnormalspannungen verschwindet und somit diese nicht sofort als solche erkennbar ist). Die Ursache dafür dürfte unter anderem in einer zu geringen Dämpfung der RFI Moden liegen. Eine für jeden RFI Mode individuell angepasste Einstellung der Dämpfung könnte hier noch eine Verbesserung der Abbildungsgenauigkeit bewirken.

Aus den Darstellungen der Vergleichsspannungsverläufe ist es jedoch schwierig die einzelnen Modellvarianten quantitativ zu vergleichen. Eine skalare Größe die die Abweichung über den gesamten Zyklus wiedergibt, wäre dazu erforderlich. Die aus der Lebensdaueranalyse resultierende Schadensumme entspricht genau dieser Bewertungsgröße, wobei durch die log-log Abhängigkeit der Wöhlerlinie die Abweichungen bei den größeren Amplituden einen größeren Anteil haben. Die weitere Bewertung der Varianten wird also bei der Diskussion der Lebensdaueranalyse vorgenommen (siehe Kapitel 6.5.3).

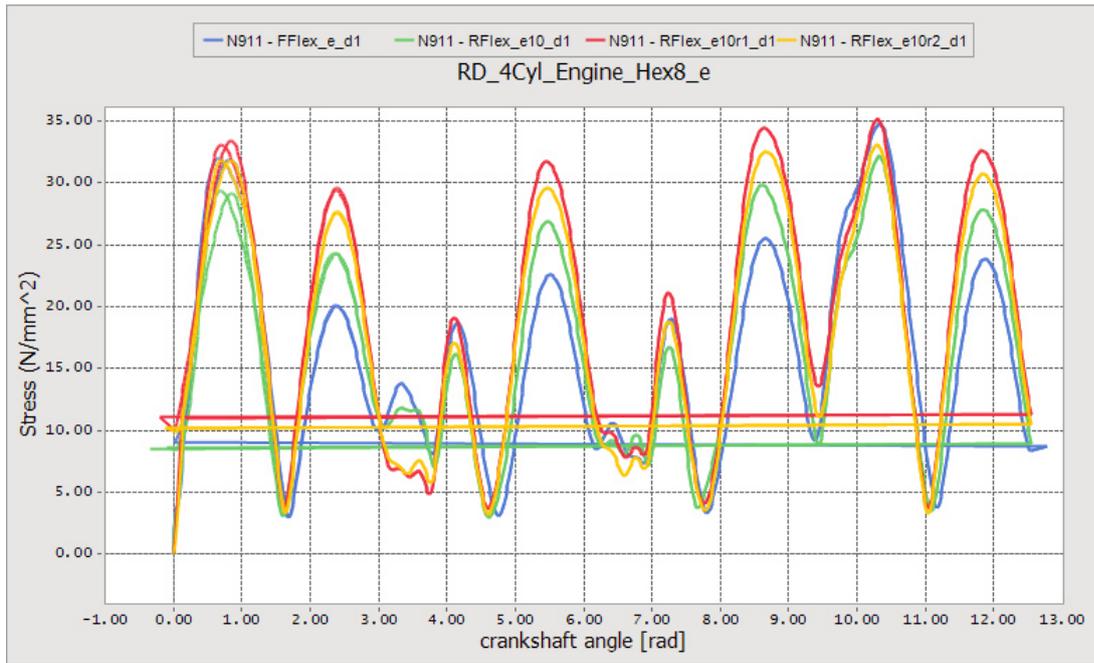


Abbildung 81: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e10%%_d1

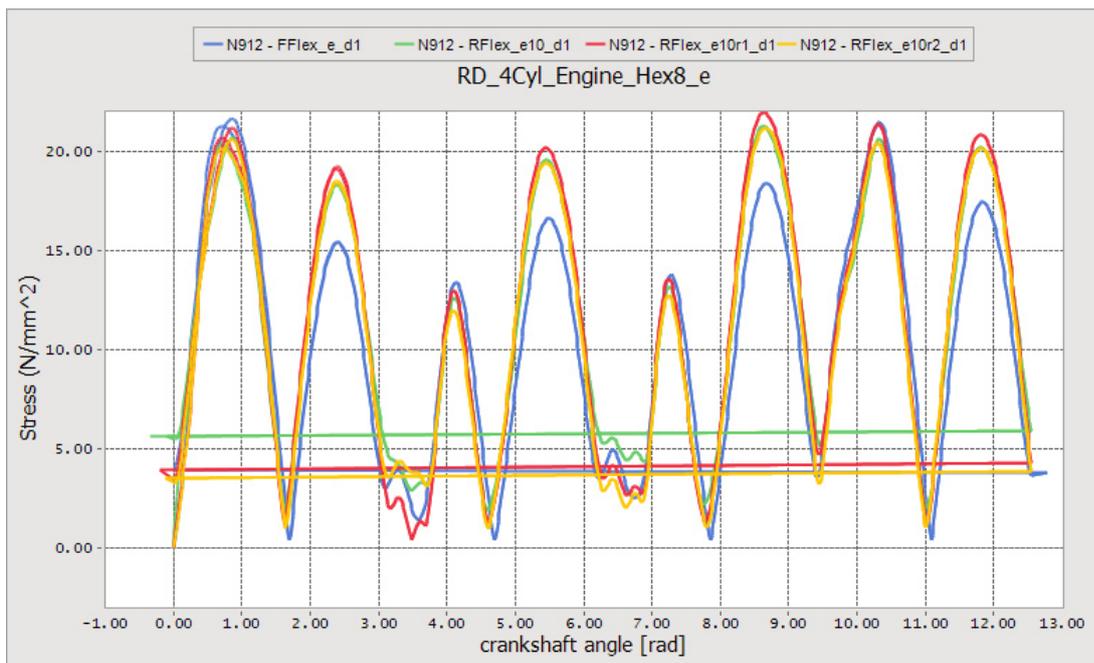


Abbildung 82: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e10%%_d1

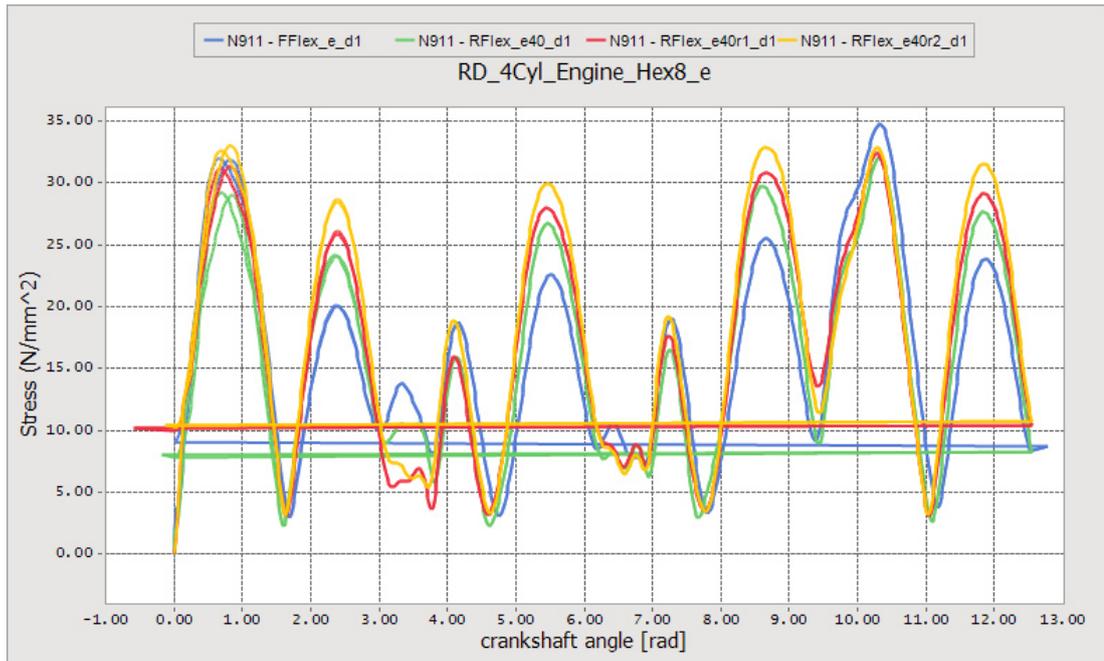


Abbildung 83: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e40%%_d1

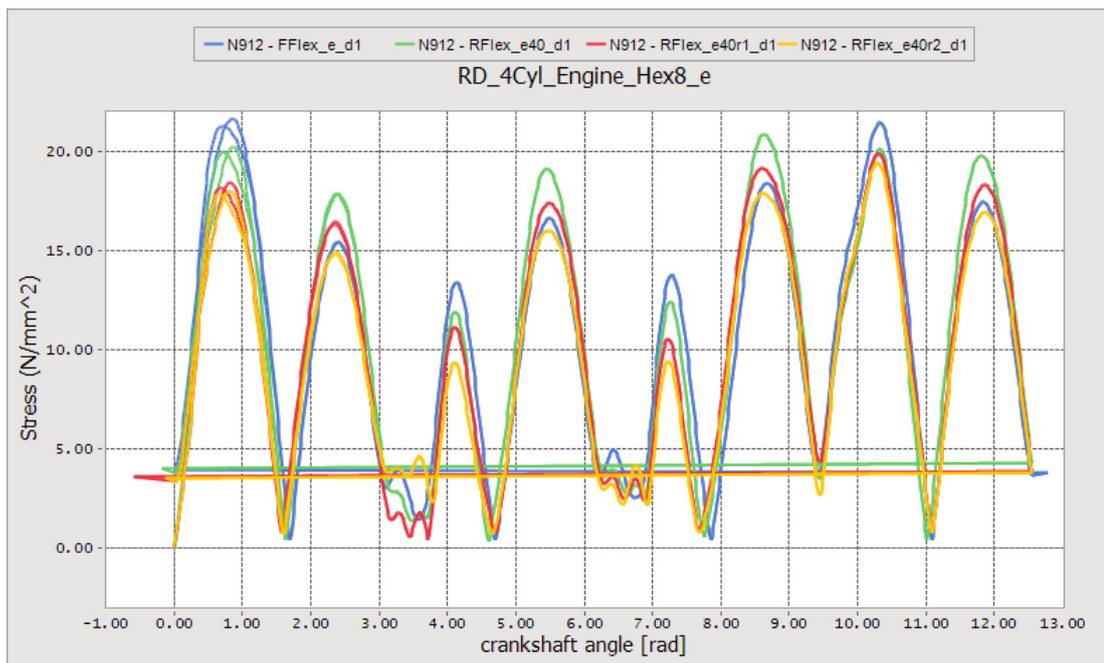


Abbildung 84: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e40%%_d1

6.5 Lebensdaueranalyse

Für den Werkstoff der Kurbelwelle wurde der Vergütungsstahl 42CrMo4 (Werkstoffnummer 1.7225) gewählt. Die Parameter der Wöhlerlinie wurden entsprechend der FKM-Richtlinie „Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“ [FKM] definiert (siehe Abbildung 85). Da die Lebensdaueranalyse zum Vergleich der Modellvarianten dient und keine exakte Berechnung darstellt, wurde auf die Berücksichtigung des Spannungsgradienten (und der daraus abgeleiteten Stützwirkung – siehe Kapitel 2.1.8) bei der Wöhlerlinie verzichtet. Dies wäre zudem aufgrund des für eine Kerbspannungsanalyse unzureichend fein diskretisierten FE Modells nicht sinnvoll.

Wöhlerlinie

Generator >> Ausfallwahrsch. >> <<

Bauteilwöhlerlinie Nenn-/Kerbspannungskonzept (R=-1)

Rm (Zug/Druck)	967,796	[N/mm ²]
Re (Zug-Druck)	791,833	[N/mm ²]
Steigung (*)	5,000	
Steigung 2 (*)	5,000	
Zug/Druck w.	435,508	[N/mm ²]
Dauerfestigkeit (*)	261,379	[N/mm ²]
Dauerfestigkeit 2 (*)	261,379	[N/mm ²]
Ecklastspielzahl (*)	1000000	
Ecklastspielzahl 2 (*)	1000000	
Mittelspannungsempf. (*)	0,2387286	
Belastung (*)	Zug/Druck	
Werkstoff	Stahl	
Ausfallwahrscheinlichkeit	2,5000	[%]
ZDw/Tw (*, nur MUX)	1,73310	

Identifikation

Kurzname: 42 CrMo 4
Werkstoffnummer: 1.7225
Bemerkung: 42CrMo4
Vergütungsstahl im vergüteten Zustand nach DIN EN 10 083-1 (Oktober 1996)

Wöhlerlinie in Datenbank speichern Pfad zur Datenbank...

generieren Protokoll anzeigen

Parameter

Berechnungsmethode	FKM	
Werkstoff	Stahl	
Belastung	Zug/Druck	
Randschichtverfahren	ohne	
Rm	1100,000	[N/mm ²]
Re	900,000	[N/mm ²]
χ *	0,00000	...
χ *(d)	0,00000	
Kf*	<input checked="" type="checkbox"/> 2,0000	
Rauhtiefe	16,00	[μm]
Kv	1,000	
Ks	1,00	?
Temperatur	20,0	[°C]
D_eff	45,0	[mm]
D_effN	16,0	[mm]
adm	0,32	<-
Anisotropie	1,00	<-
K_NL	1,000	
Sicherheitsfaktor (jD)	1,5000	...

OK Abbrechen Hilfe

Abbildung 85: Parameter der Wöhlerlinie für die Kurbelwelle aus 42CrMo4

Die resultierende Wöhlerlinie sowie das Haigh-Diagramm (nach FKM) sind in Abbildung 86 und Abbildung 87 dargestellt.

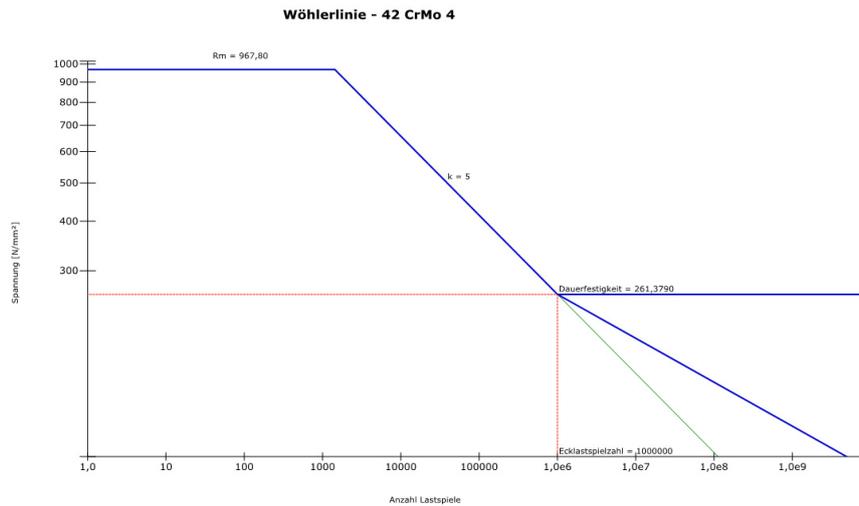
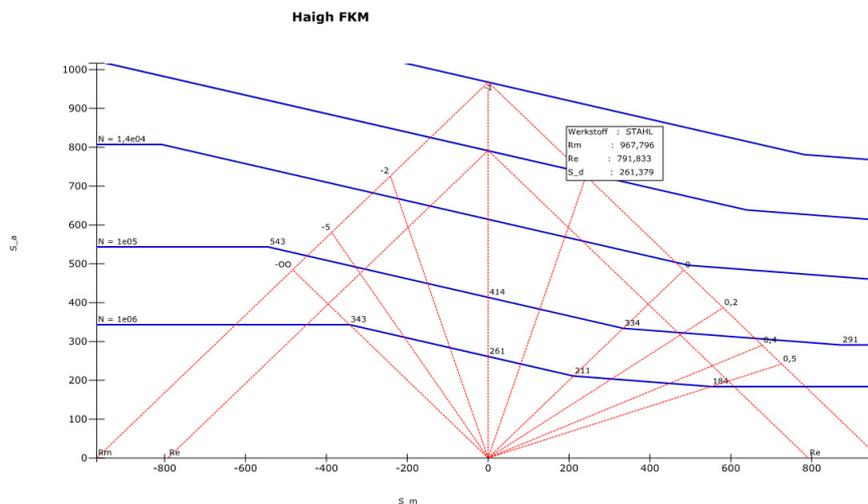
Abbildung 86: Wöhlerlinie der Kurbelwelle ($R = -1$)

Abbildung 87: Haigh-Diagramm (nach FKM) der Kurbelwelle

Für alle Lebensdaueranalysen wurde das multiaxiale Verfahren der Methode der kritischen Schnittebene (siehe Kapitel 2.5.3) gewählt, da aufgrund der Beanspruchungssituation von nichtproportionalen Hauptspannungen mit drehendem Hauptspannungswinkel ausgegangen werden muss. Für die Berechnung der Schädigung in den Schnittebenen wurde das Verfahren der Normalspannungsmodifikation des Spannungstensors (STM) gewählt (siehe Kapitel 2.5.3.1 bzw. [GAI]). Die Klassierung des Spannungstensor-Zeitverlaufs erfolgt in 50 Klassen, deren Klassenbreite automatisch durch die Maximal- und Minimalwerte des Verlaufs bestimmt wird. Der Mittelspannungseinfluss wird durch die Amplitudentransformation - entsprechend dem Vorgehen der FKM-Richtlinie - berücksichtigt (siehe Kapitel 2.1.6). Die Anzahl der Schnittebenen beträgt zwanzig. Das möglicherweise vorhandene Residuum der Klassierung wird berücksichtigt. Die Schadensakkumulation erfolgt nach der „Elementaren Form“ der Miner-Regel (siehe Kapitel 2.3).

6.5.1 FFlex Referenzlösung – nichtlineare Analyse

Die Lebensdaueranalyse der FFlex Referenzmodelle erfolgt mit der Methode der „Nicht-linearen Analyse“ in winLIFE (siehe Kapitel 3.1.2). Der Spannungstensor-Zeitverlauf an den beiden Knoten Nr. 911 und Nr. 912 wurde zu diesem Zweck aus RECURDYN exportiert und damit die Schädigungsrechnung durchgeführt, wobei nur der zweite Verbrennungszyklus der Simulation verwendet wurde.

Anhand des Vergleichsspannungsverlaufs (STM) - in der kritischen Schnittebene - lassen sich die Einträge der Rainflowmatrix direkt zuordnen. Den größten Anteil an der Schädigung trägt die Schleife der Spitzenwerte (min./max.) des Zyklus. Die folgenden Abbildungen zeigen die Dämpfungsvariante **d1**.

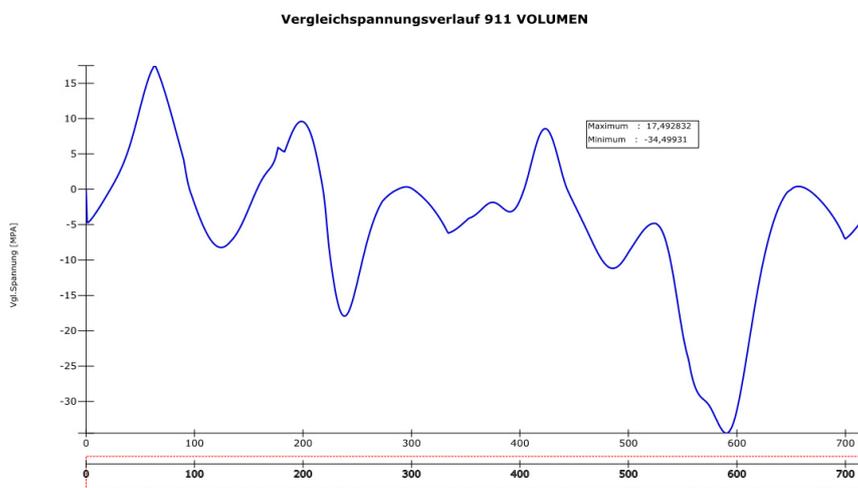


Abbildung 88: Vergleichsspannungsverlauf (STM) – N911 - FFlex_e_d1

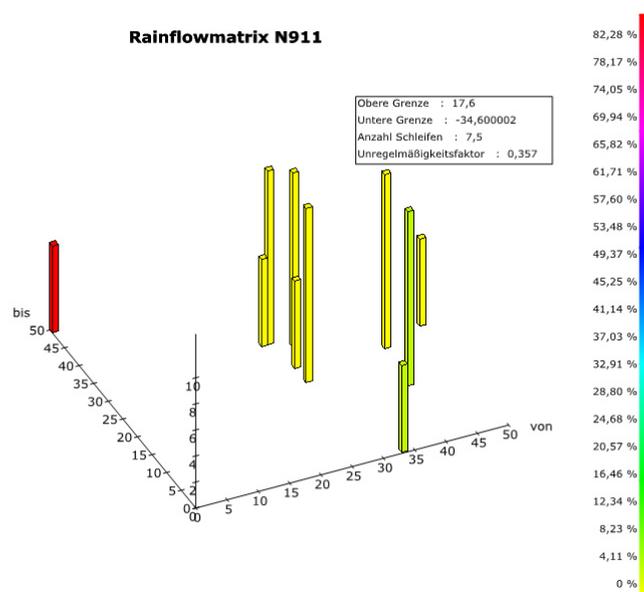


Abbildung 89: RM - N911 – FFlex_e_d1

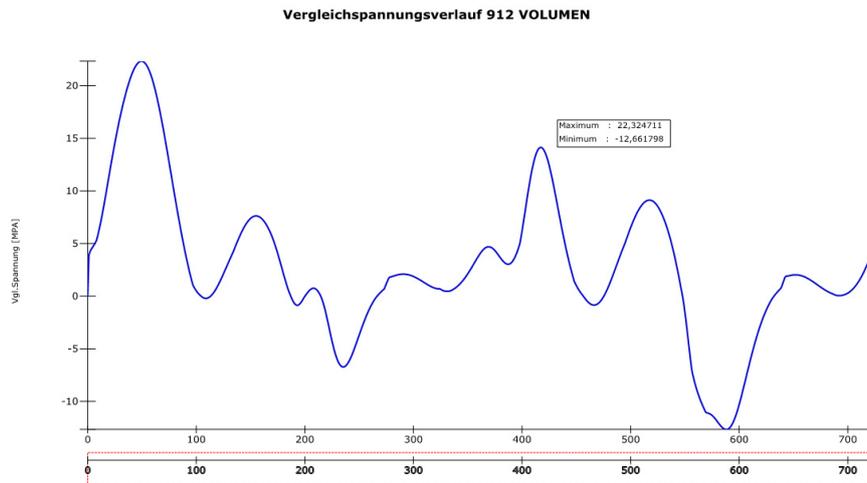


Abbildung 90: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N912 – FFlex_e_d1

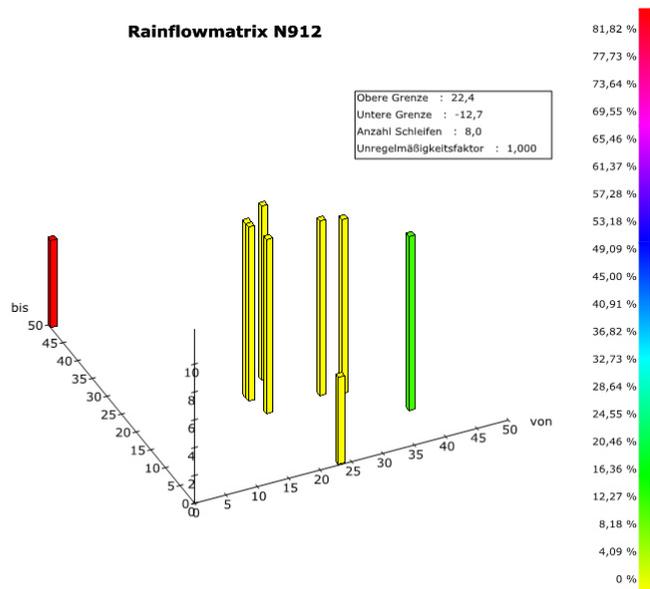


Abbildung 91: RM - N912 – FFlex_e_d1

Die Darstellung erfolgt für die Dämpfungsvariante 1, der vollständige Satz an Abbildungen ist im Anhang Teil 2 enthalten.

Die Schädigungsrechnung führte zu folgendem Ergebnis:

Tabelle 9: Referenzlösung der Lebensdaueranalyse – Schadensumme am Knoten

Dämpfungs- variante	N911	N912
d1	4.03 E-12	1.15E-12
d2	7.10 E-12	1.82 E-12

Aus der Darstellung der Hauptspannung als Funktion des Winkels sowie dem Hauptspannungsverhältnis lässt sich sehr gut erkennen, dass es sich an den beiden Nachweispunkten tatsächlich um ein multiaxiales Problem handelt. Über den gesamten Verbrennungszyklus variiert die Richtung der ersten Hauptspannung und es ist kein konstantes Hauptspannungsverhältnis vorhanden.

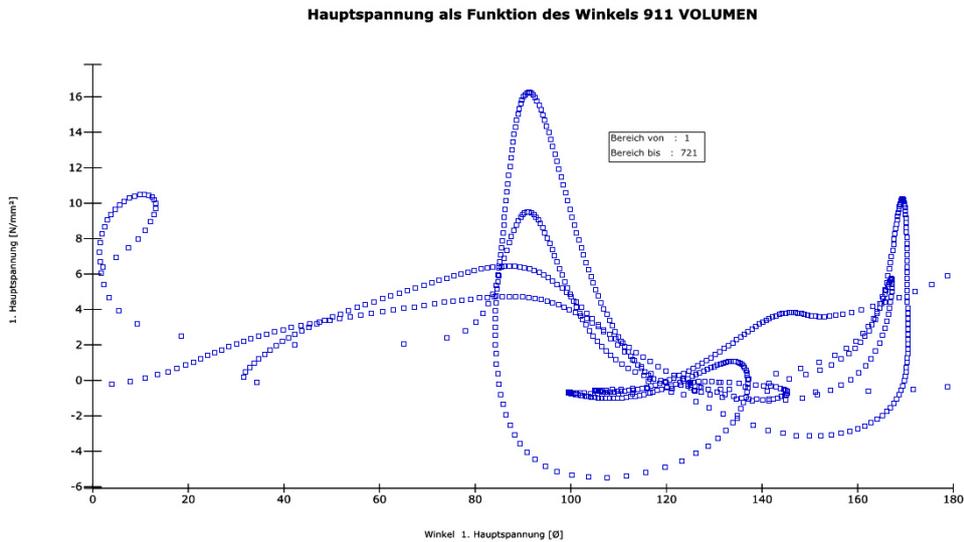


Abbildung 92: S1 vs. Winkel - N911 - FFlex_e_d1

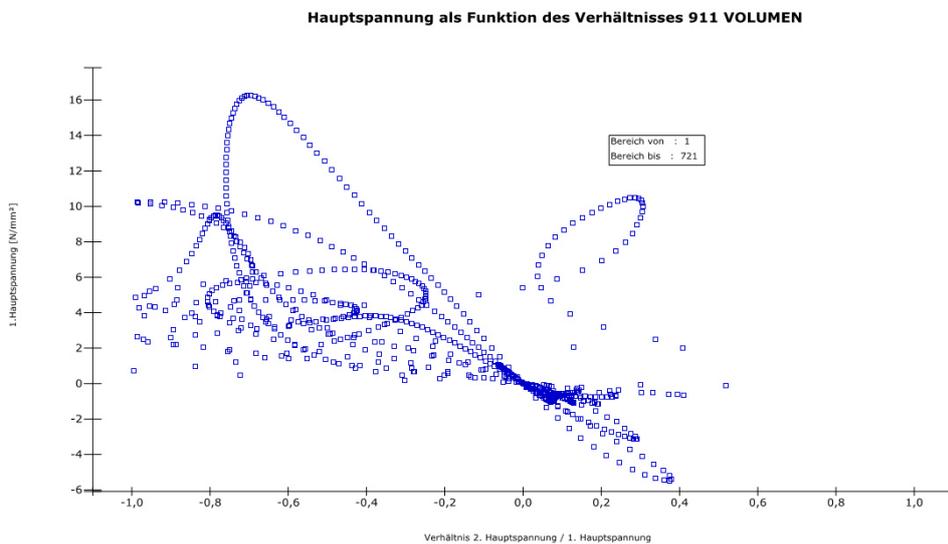


Abbildung 93: S1 vs. S2/S1 - N911 - FFlex_e_d1

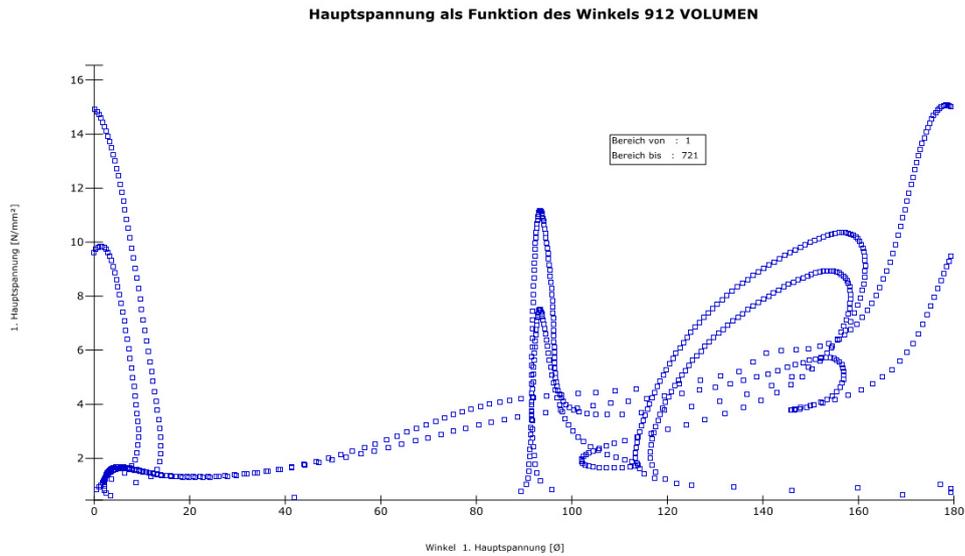


Abbildung 94: S1 vs. Winkel - N912 - FFlex_e_d1

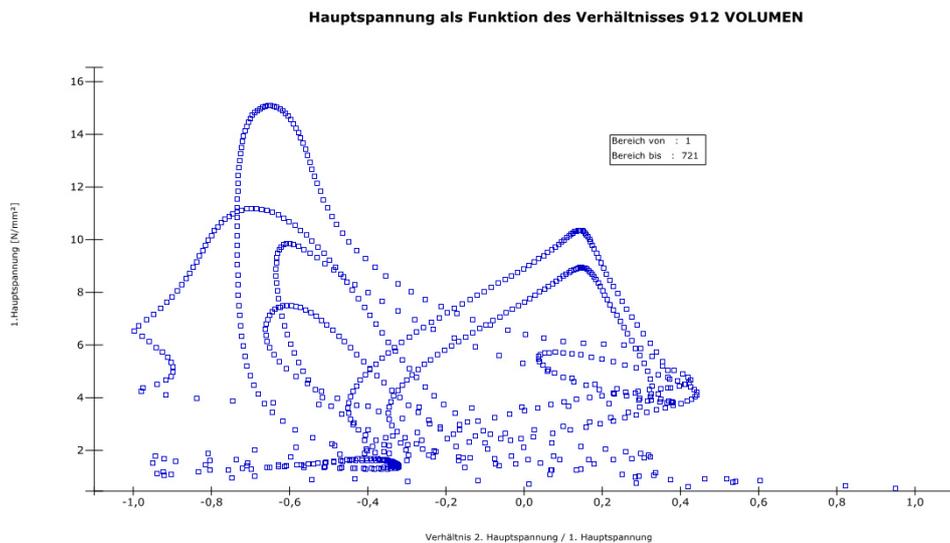


Abbildung 95: S1 vs. S2/S1 - N912 - FFlex_e_d1

Der jeweilige Anteil der einzelnen Kollektivstufen an der Gesamtschädigung lässt sich anschaulich im Plot der Wöhlerlinie darstellen. Wesentlich für die Gesamtschädigung ist also die Maximalamplitude, der Anteil der weiteren Amplituden liegt beim dargestellten Knoten Nr. 911 (bei der Dämpfungsvariante **d1**) bei ca. 20%.

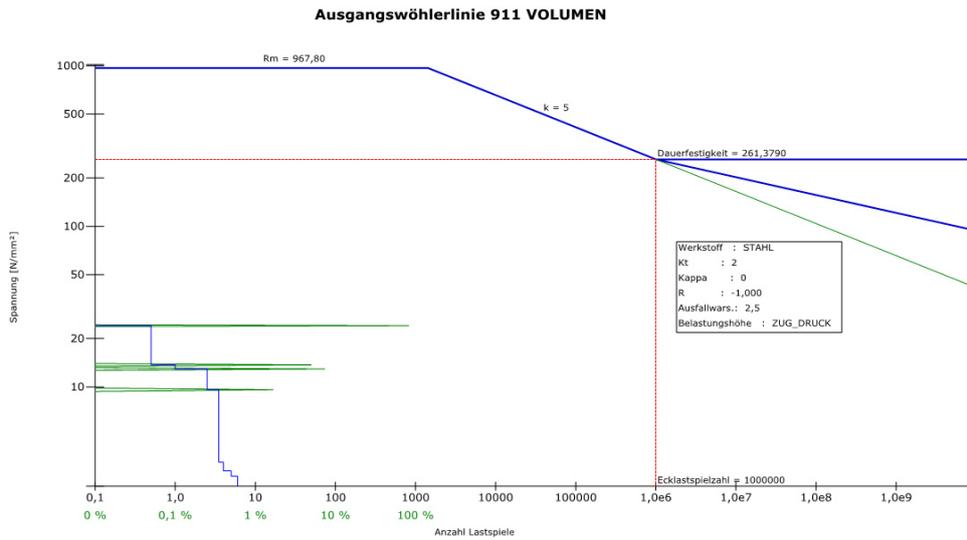


Abbildung 96: WL mit Schädigungsanteil des Kollektivs - N911 - FFlex_e_d1

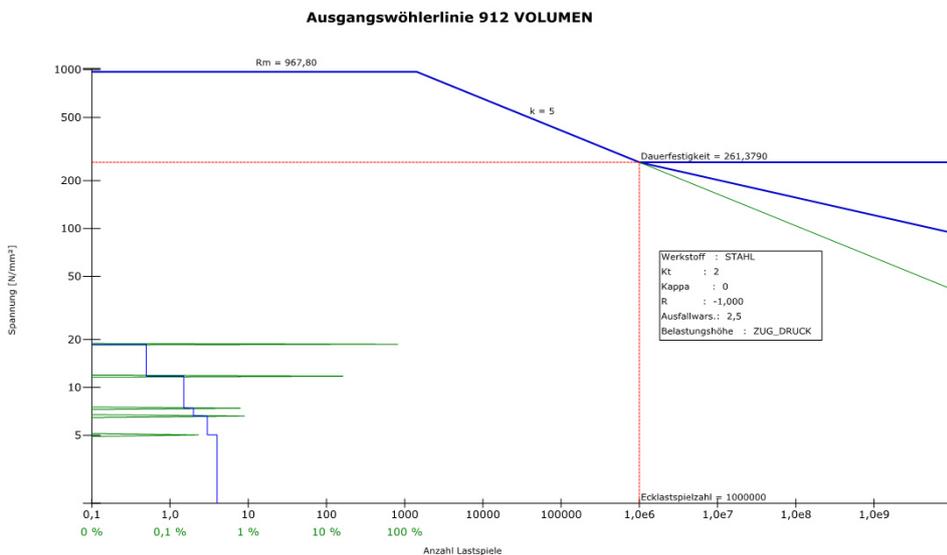


Abbildung 97: WL mit Schädigungsanteil des Kollektivs - N912 - FFlex_e_d1

6.5.2 RFlex Analyse – Superposition der modalen Einheitslastfälle

Die Lebensdaueranalyse der RFlex Referenzmodelle wird mit der im Kapitel 3.1.3 beschriebenen Methode der "Superposition von modalen Einheitslastfällen" durchgeführt. Aus RECURDYN werden die Spannungstensoren aller Knoten (in RECURDYN werden diese mit „stress shapes“ bezeichnet) an der Oberfläche der Kurbelwelle für jeden verwendeten Eigenmode exportiert. Dies sind die modalen Einheitslastfälle. Der Zeitverlauf der modalen Koordinaten wird ebenfalls aus RECURDYN exportiert. Mit diesen Informationen kann die Lebensdaueranalyse in winLIFE durchgeführt werden.

Für die Darstellung der winLIFE Ergebnisse wird wieder die Dämpfungsvariante **d1** verwendet. Die Ergebnisse des Knotens Nr. 911 beruhen auf dem Modell RFlex_e30r1_d1, die des Knotens Nr. 912 auf dem Modell RFlex_e40r2_d1. Der vollständige Ergebnissatz ist im Anhang Teil 2 enthalten.

Der Vergleichsspannungsverlauf am Knoten Nr. 911 hat einen etwas veränderten Verlauf, wobei in Kombination mit der Rainflowmatrix auffällt, dass die Schleife der Spitzenwerte nun geschlossen und zur Gänze berücksichtigt wird. Die Spitzenwerte sind jedoch - wie in der Legende der Rainflowmatrix ersichtlich ist - gleich groß.

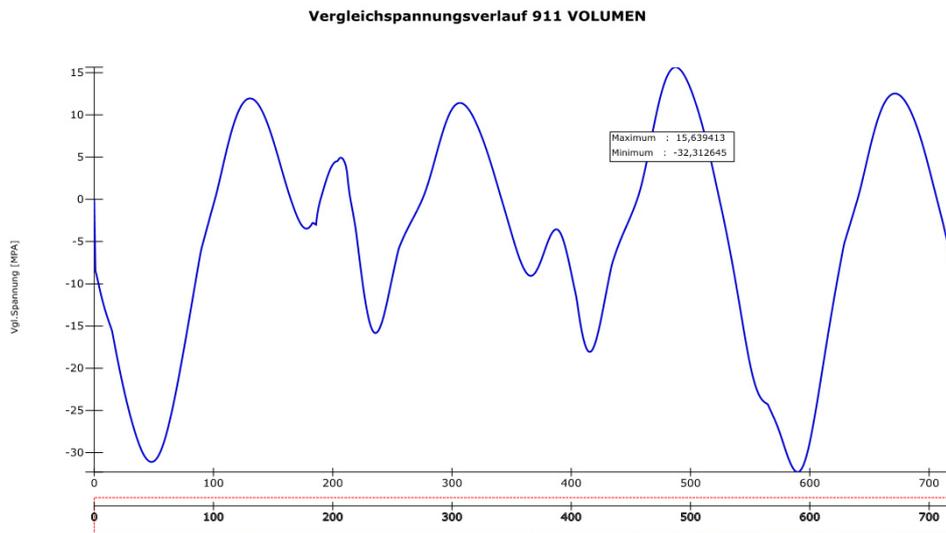


Abbildung 98: Vergleichsspannungsverlauf (STM) – N911 - RFlex_e30r1_d1

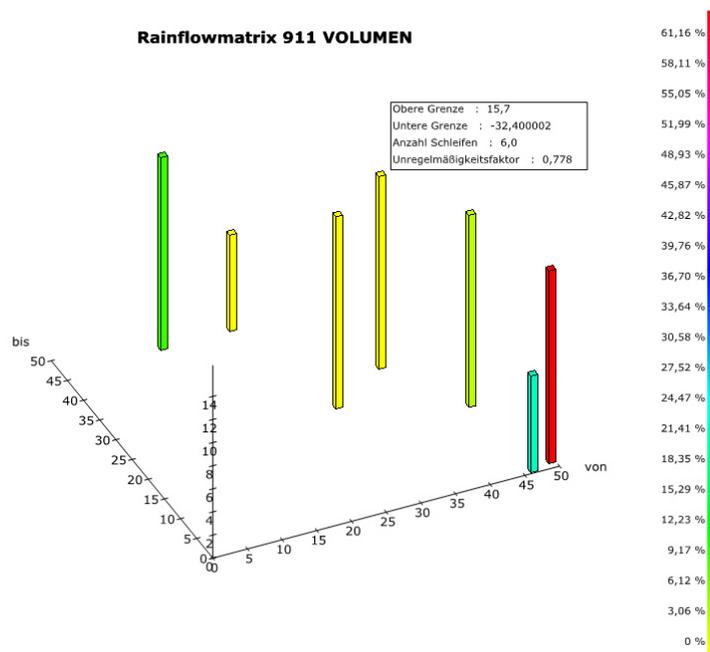


Abbildung 99: RM - N911 – RFlex_e30r1_d1

Der Vergleichsspannungsverlauf am Knoten Nr. 912 zeigt einen ähnlichen Verlauf wie der zum Knoten Nr. 911 gehörige. Der Wechsel in der Rainflowzählung von stehenden zu hängenden Schleifen dürfte die Ursache in der Lage der jeweils kritischen Schnittebene haben. Bei allen Analysen treten zwei Schnittebenen mit nahezu gleicher Schädigung auf. Diese Ebenen liegen genau um 90° gedreht zueinander.

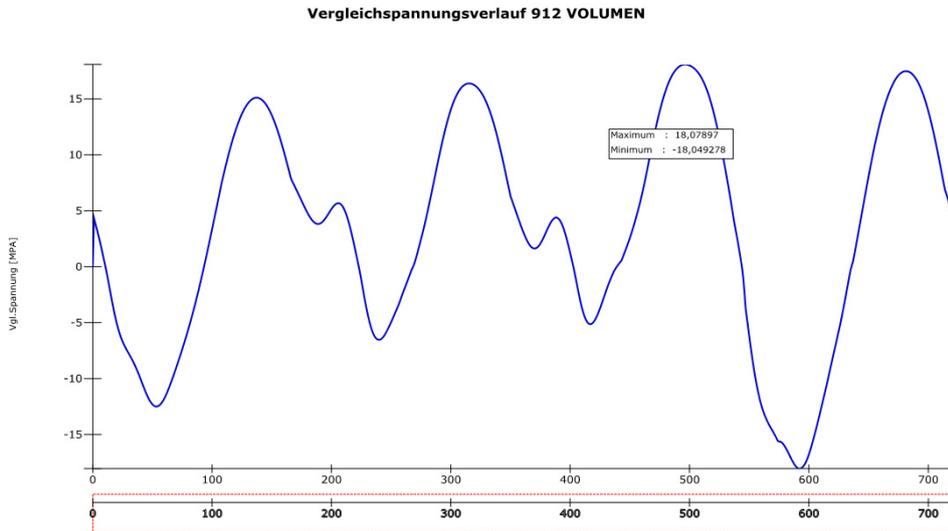


Abbildung 100: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N912 - RFlex_e40r2_d1

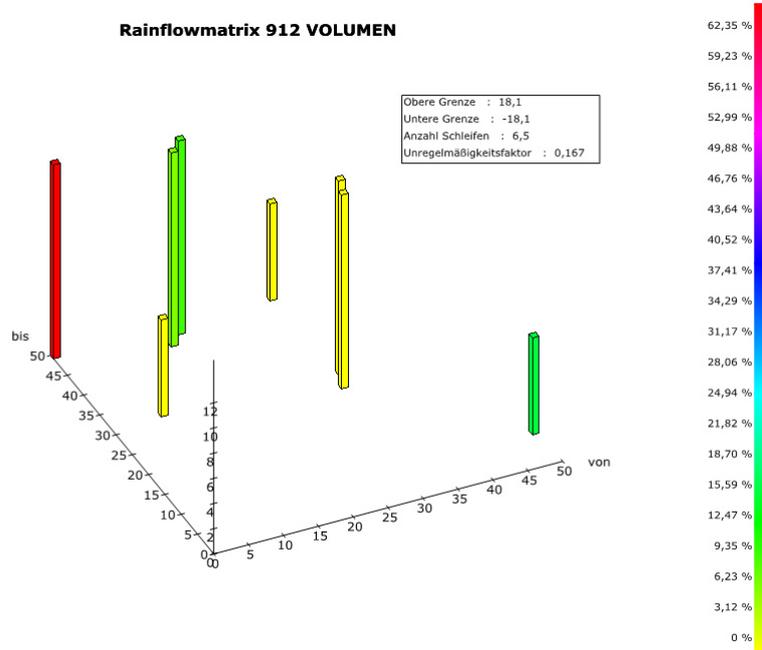


Abbildung 101: RM - N912 – RFlex_e40r2_d1

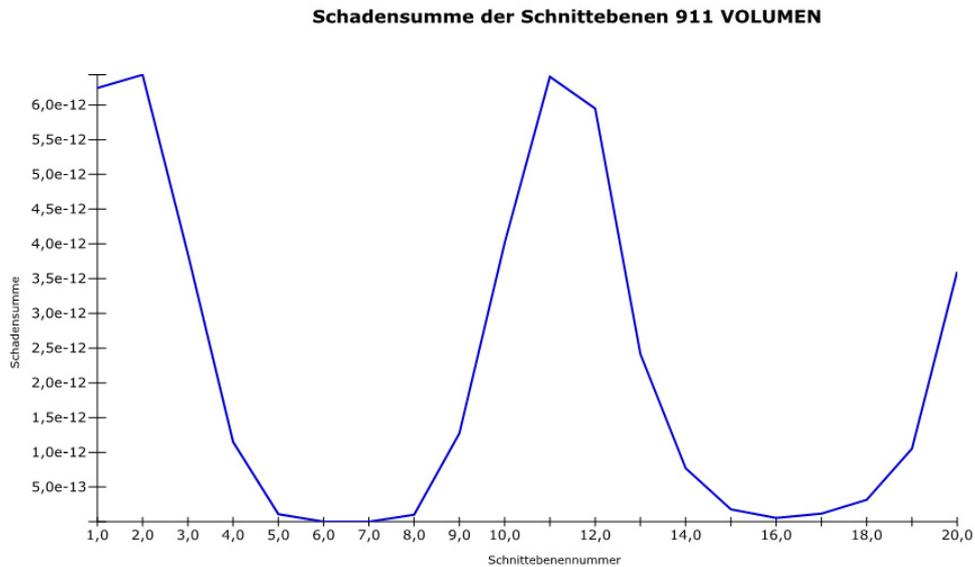


Abbildung 102: Schadensumme der Schnittebenen - N911 - RFlex_e30r1_d1

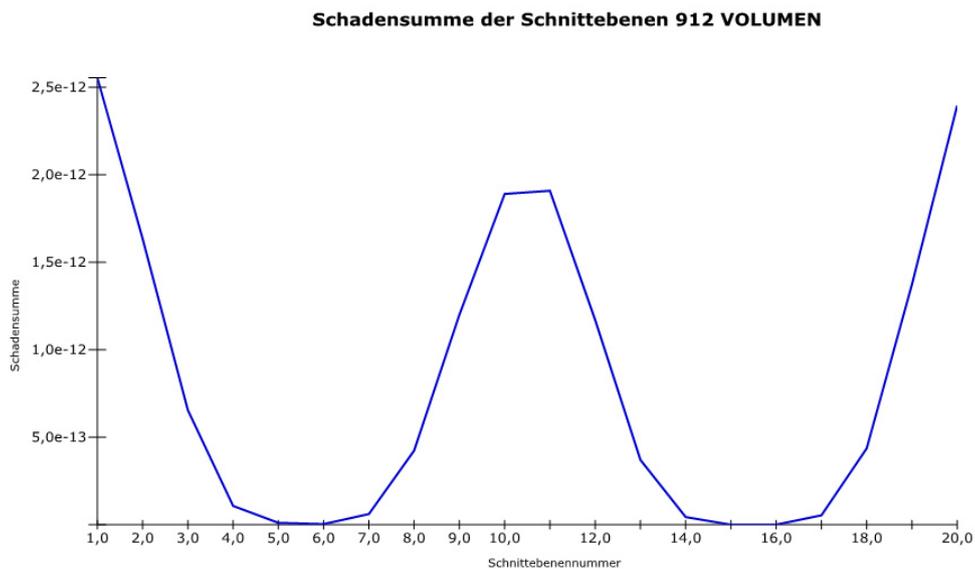


Abbildung 103: Schadensumme der Schnittebenen - N912 - RFlex_e40r2_d1

Aus den Abbildungen der Schadensummen der einzelnen Schnittebenen können zwei Effekte der Analyse abgeleitet werden:

- Es existieren zwei Schnittebenen mit ähnlicher Schadensumme.
- Der Raster der Schnittebenen beeinflusst, welche Ebene als kritisch bestimmt wird.

Der Verlauf der ersten Hauptspannung als Funktion des Winkels zeigt ein mit der FFlex Referenzlösung vergleichbares Bild. Die U-Form ist jedoch ausgeprägter. Die Schleifen der Darstellung der ersten Hauptspannung als Funktion des Hauptspannungsverhältnisses sind dichter gedrängt. Beide Effekte liegen darin begründet, dass den RFlex Lösungen eine limitierte Anzahl an Deformationszuständen, die Überlagerung aller berücksichtigten Eigenvektoren, zugrunde liegt. Die Spannungszustände folgen diesen „Pfadern“. Die FFlex Lösung kann jedoch - entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade - weitaus mehr Deformationszustände abbilden.

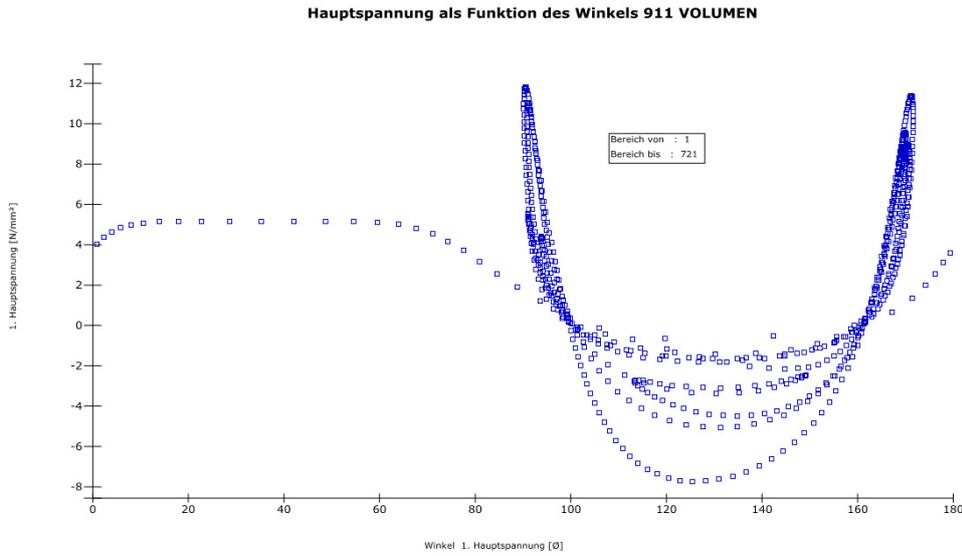


Abbildung 104: S1 vs. Winkel - N911 - RFlex_e30r1_d1

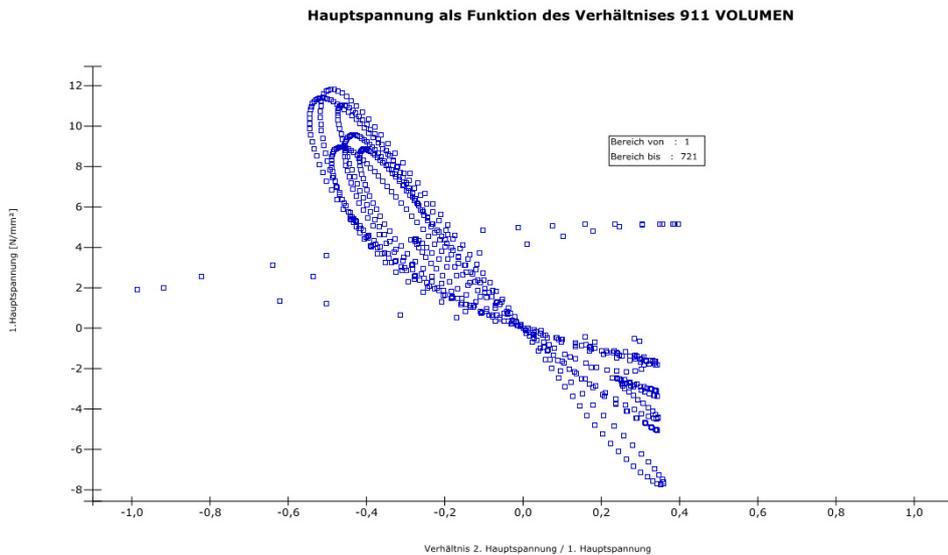


Abbildung 105: S1 vs. S2/S1 - N911 - RFlex_e30r1_d1

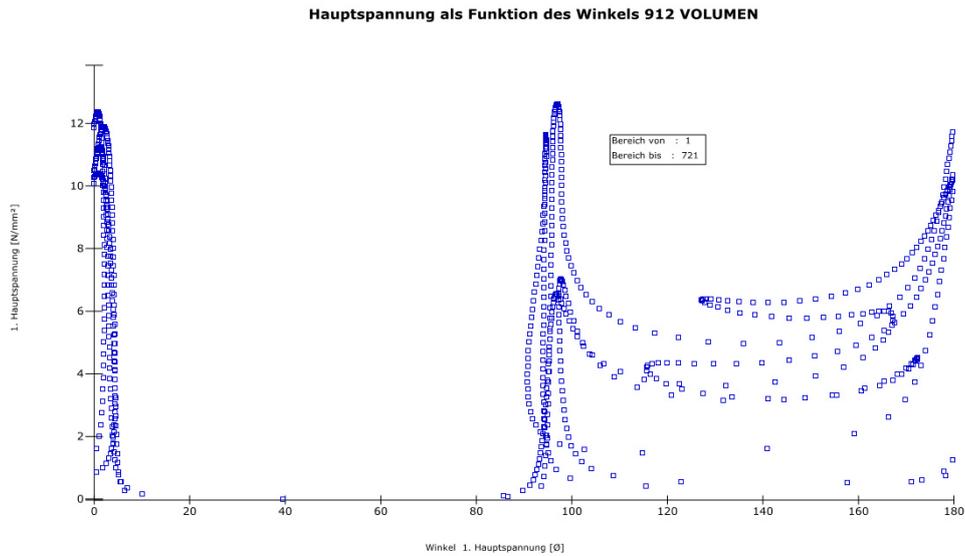


Abbildung 106: S1 vs. Winkel - N912 - RFlex_e40r2_d1

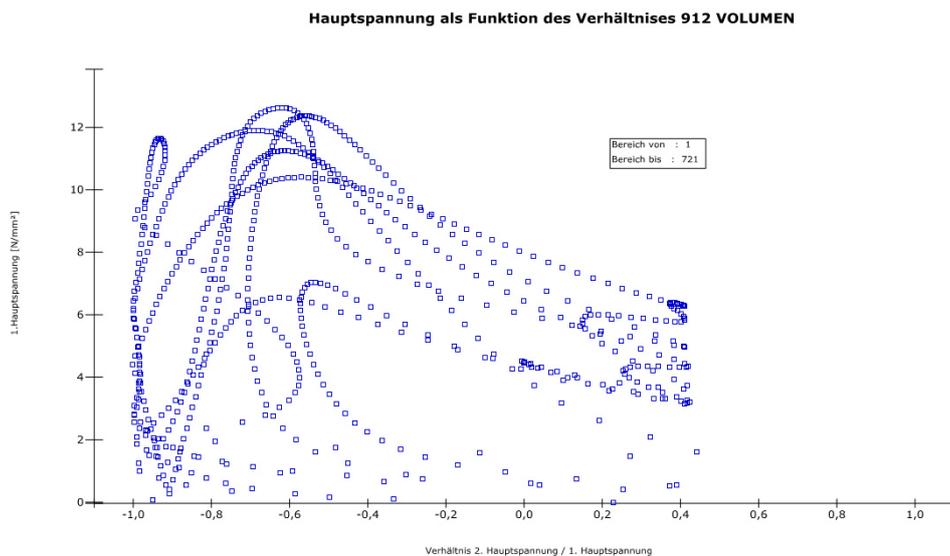


Abbildung 107: S1 vs. S2/S1 - N912 - RFlex_e40r2_d1

Der Vergleich der dargestellten Graphen hilft, die Abweichungen in der Schadenssumme für ausgewählte Analysen besser zu verstehen. Für einen Vergleich der Modellvarianten untereinander sind diese Abbildungen, aufgrund der Vielzahl an enthaltenen Informationen, jedoch weniger geeignet. Zu diesem Zweck ist die Schadenssumme der kritischen Schnittebene ein weitaus geeigneteres Werkzeug.

6.5.3 Vergleich der Methoden

Die Schadensumme wird getrennt für jeden Knoten für alle analysierten Modellvarianten in Form von Tabellen gelistet.

Tabelle 10: Schadensumme am Knoten Nr. 911

Modellvariante		Dämpfungsvariante	
		d1	d2
FFlex_e		4.03 E-12	7.10 E-12
RFlex_e10	-	1.26E-11	4.49E-11
	r1	1.17E-11	2.81E-11
	r2	1.08E-11	1.89E-11
RFlex_e20	-	1.29E-11	4.98E-11
	r1	8.86E-12	1.41E-11
	r2	1.26E-11	1.70E-11
RFlex_e30	-	1.24E-11	4.93E-11
	r1	6.43E-12	9.16E-12
	r2	1.12E-11	1.43E-11
RFlex_e40	-	1.14E-11	5.65E-11
	r1	6.57E-12	9.53E-12
	r2	1.09E-11	1.40E-11

Tabelle 11: Schadensumme am Knoten Nr. 912

Modellvariante		Dämpfungsvariante	
		d1	d2
FFlex_e		1.15E-12	1.82E-12
RFlex_e10	-	6.91E-13	1.06E-11
	r1	5.44E-12	9.05E-12
	r2	5.09E-12	7.90E-12
RFlex_e20	-	6.24E-12	1.33E-11
	r1	3.52E-12	5.28E-12
	r2	2.68E-12	3.21E-12
RFlex_e30	-	6.12E-12	1.37E-11
	r1	3.26E-12	4.14E-12
	r2	2.77E-12	3.19E-12
RFlex_e40	-	5.17E-12	1.20E-11
	r1	3.05E-12	3.90E-12
	r2	2.55E-12	3.14E-12

Die relative Abweichung $\frac{D_x}{D_{ref}}$ gibt jedoch einen besseren Überblick über die Abweichungen der RFlex Lösungen zur jeweiligen FFlex Lösung.

Tabelle 12: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 911

Modellvariante		Dämpfungsvariante	
		d1	d2
FFlex_e		1.00	1.00
RFlex_e10	-	3.13	6.32
	r1	2.91	3.96
	r2	2.68	2.66
RFlex_e20	-	3.21	7.02
	r1	2.20	1.98
	r2	3.12	2.40
RFlex_e30	-	3.09	6.95
	r1	1.60	1.29
	r2	2.79	2.01
RFlex_e40	-	2.84	7.96
	r1	1.63	1.34
	r2	2.71	1.97

Tabelle 13: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 912

Modellvariante		Dämpfungsvariante	
		d1	d2
FFlex_e		1.00	1.00
RFlex_e10	-	0.60	5.79
	r1	4.74	4.96
	r2	4.44	4.33
RFlex_e20	-	5.43	7.30
	r1	3.06	2.90
	r2	2.33	1.76
RFlex_e30	-	5.34	7.49
	r1	2.84	2.27
	r2	2.41	1.75
RFlex_e40	-	4.50	6.55
	r1	2.66	2.14
	r2	2.23	1.72

Für beide Knoten kann festgestellt werden, dass mit einer steigenden Anzahl an CMS Moden die Abbildungsgenauigkeit steigt. Das bedeutet, die Schadenssumme nähert sich von oben dem Referenzwert. Einzig die Variante mit 10 CMS Moden scheint eine unzureichende Genauigkeit aufzuweisen. Es bestätigen sich die beim Vergleich der Eigenmoden gewonnenen Erkenntnisse.

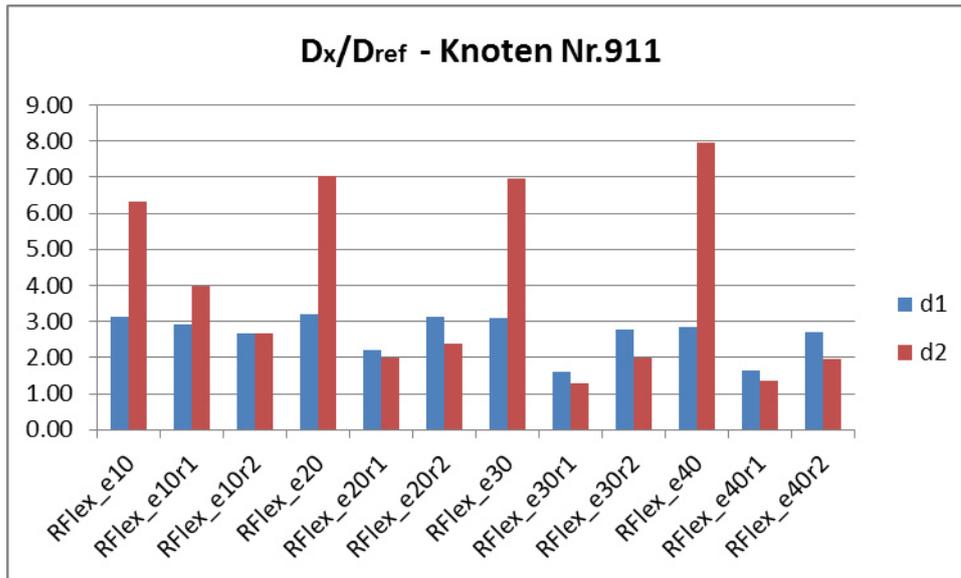


Abbildung 108: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 911

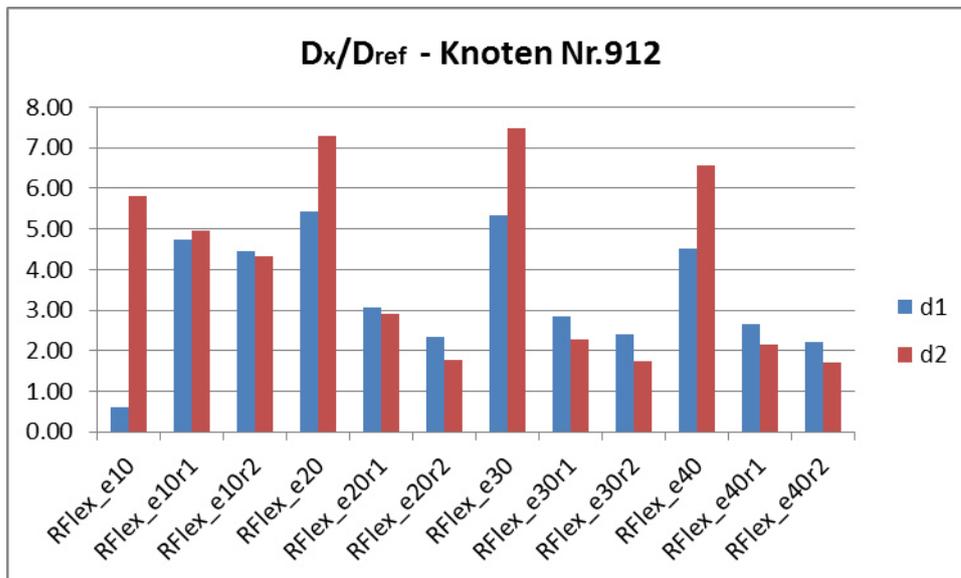


Abbildung 109: Relative Abweichung der Schadenssumme am Knoten Nr. 912

Für alle Modelle zeigt sich jedoch auch, dass die Beschränkung der RFI Moden - diese wurde ja bei den Varianten r1 und r2 vorgenommen - eine weitere Verbesserung der Genauigkeit bringt. Die hochfrequenten Moden bilden die „static correction modes“ (also die Einheitsverschiebung an den Masterfreiheitsgraden) der CMS Reduktion ab. Wenn keine Belastung in Richtung dieser Freiheitsgrade erfolgt, dürften diese Moden eher einen negativen Einfluss haben. Ein zweites Argument für die negative Auswirkung der hochfrequenten Moden liegt in dem gewählten Dämpfungsansatz begründet. Die rein steifigkeitsproportionale Dämpfung bewirkt bei der Variante **d1** bereits ab 3.5kHz eine überkritische Dämpfung. Bei der Variante **d2** ist dies nicht der Fall, hier werden alle Moden unterkritisch gedämpft.

Schließlich kann auch noch die Abbildungsgüte der höherfrequenten Moden selbst als Ursache in Erwägung gezogen werden. Wie aus der Bewertung der CMS Reduktion in Kapitel 6.3 hervorgeht (siehe auch Abbildung 67 und Abbildung 68), ist über 7kHz eine Abnahme der Korrelation vorhanden. Der Bereich über 10kHz ist in dieser Betrachtung nicht vorhanden. Es ist jedoch anzunehmen, dass mit steigender Eigenfrequenz die Korrelation weiter abnimmt. Abhilfe würde hier die Berücksichtigung einer größeren Anzahl von Moden bei der CMS Reduktion schaffen.

6.5.4 Detailanalyse mit Submodelltechnik

Wie bereits erwähnt wurde, reicht die bei der Analyse der gesamten Kurbelwelle gewählte Diskretisierung der Kurbelwelle nicht aus, um die Kerbspannungen mit hinreichender Genauigkeit abzubilden. Die Überprüfung der Spannungskonvergenz eines FEM Modells wird iterativ durch eine Verfeinerung des Netzes an der jeweils betrachteten Stelle vorgenommen. Für Lebensdaueranalysen sollte das Konvergenzkriterium bei einer Abweichung unter 1 Prozent liegen.

Zur Bewertung von lokalen Kerbspannungen wird häufig die Submodelltechnik angewandt. Diese wird auch als „Cut-Boundary“ Methode bezeichnet und ermöglicht die Berechnung von Detailmodellen basierend auf den Ergebnissen von Gesamtmodellen. „Cut-Boundary“ bedeutet Schnitt durch das Gesamtmodell. Die aus den Verschiebungsergebnissen des Gesamtmodells auf diese Schnittränder des Detailmodells interpolierten Werte werden als Randbedingungen für die Detailanalyse verwendet. Bei der Wahl der Schnittränder muss jedoch darauf geachtet werden, dass diese so weit vom Kerbdetail entfernt liegen, dass die lokalen Dehnungen keine Auswirkung auf die Verschiebungen an den Schnitträndern haben. Da die Interpolation der Verschiebungen immer in globalen Koordinaten durchgeführt wird, muss das Submodell an der identischen Stelle (wie im Gesamtmodell) liegen! Es empfiehlt sich das Submodell aus dem Gesamtmodell „herauszuschneiden“.

Die Analyse erfolgt in folgenden Schritten:

1. Aufbau und Analyse des Gesamtmodells
2. Vernetzung des Submodells
3. Gruppieren der Knoten an den Schnitträndern (Cut-Boundary) des Submodells
4. Interpolation einer Verschiebungsrandbedingung für jeden Knoten der „Cut-Boundary“ aus den Verschiebungsergebnissen des Gesamtmodells
5. Zusätzliches Aufbringen von etwaig vorhandenen Belastungen
6. Berechnung des Submodells

Um ein spannungskonvergentes Submodell zu erhalten, werden die Schritte 2 bis 6 so oft wiederholt, bis die Differenz der Kerbspannung zwischen den Varianten hinreichend klein ist.

Die Umsetzung der Submodelltechnik erfolgt in den kommerziellen FEM Softwareprodukten zumeist teilautomatisiert über spezielle Befehle.

Ein großer Vorteil der Submodelltechnik ist der Umstand, dass diese auch basierend auf einer nichtlinearen und/oder dynamischen Analyse des Gesamtsystems durchgeführt werden kann. Die Analyse des Submodells selbst kann jedoch eine rein lineare sein. Dies bringt sehr oft einen großen Vorteil hinsichtlich des Rechenzeitbedarfs.

Hinweise zur Anwendung der Submodelltechnik finden sich bei Nasdala [NFE] S. 250 sowie bei Groth und Müller [FfP1] S. 562.

Für das zu untersuchende Detail der Kurbelwelle umfasst das Submodell eine Kurbelwange mit den anschließenden Übergängen zu den Lagerzapfen. Die Lage der Schnittränder ist in Abbildung 110 dargestellt.

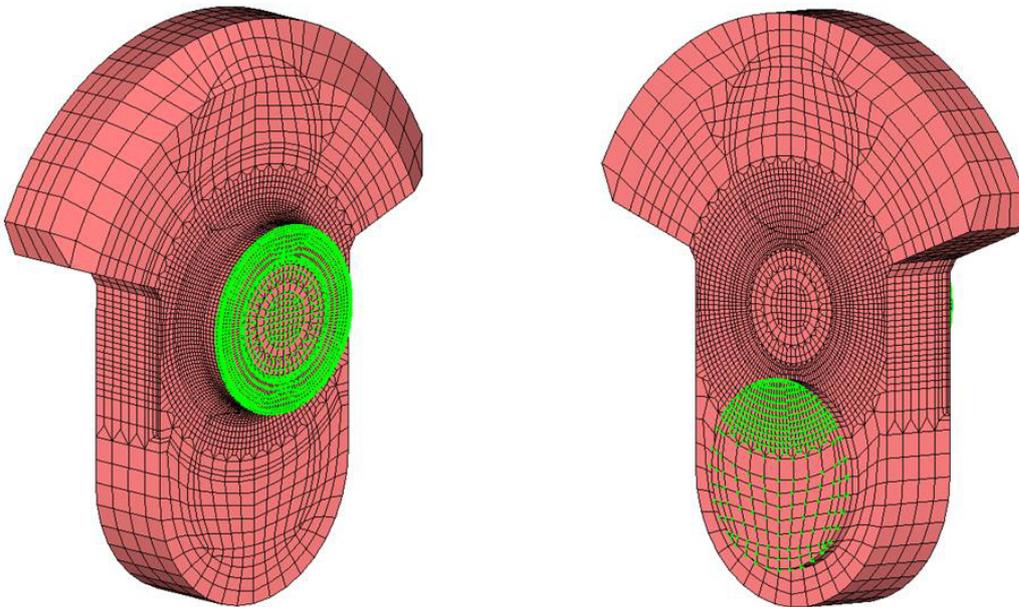


Abbildung 110: Submodell mit Cut-Boundary Knoten

Für alle modalen Einheitslastfälle – also für die verwendeten RFI Moden – wird nun die Submodelltechnik angewandt und damit die lokalen Spannungen berechnet.

Zur Darstellung wurde die Modellvariante RFlex_e20r2 gewählt. Wie Tabelle 7 entnommen werden kann, wurden bei dieser Variante insgesamt 21 RFI Moden verwendet. Daraus folgen 21 Einheitslastfälle mit Spannungsergebnissen. Die Vergleichsspannung nach v. Mises wird für die ersten 10 Moden in den folgenden Abbildungen dargestellt. Die Prüfung der Plausibilität der Spannungsverteilung kann durch den Vergleich mit den zugrundeliegenden Deformationen des Gesamtmodells (Abbildung 64 und Abbildung 65) durchgeführt werden.

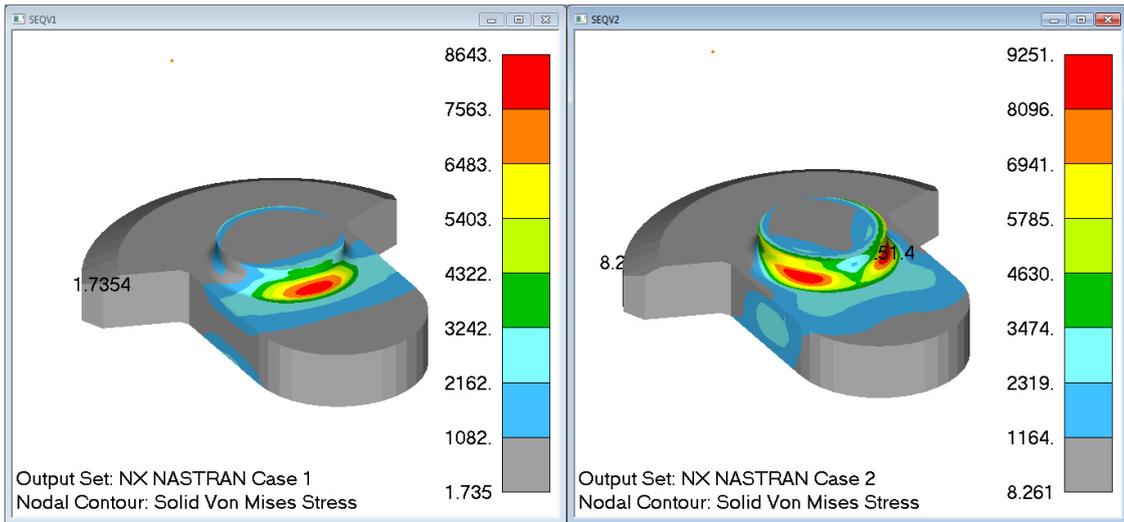


Abbildung 111: SEQV - Submodell - Mode 1 (links) und Mode 2 (rechts)

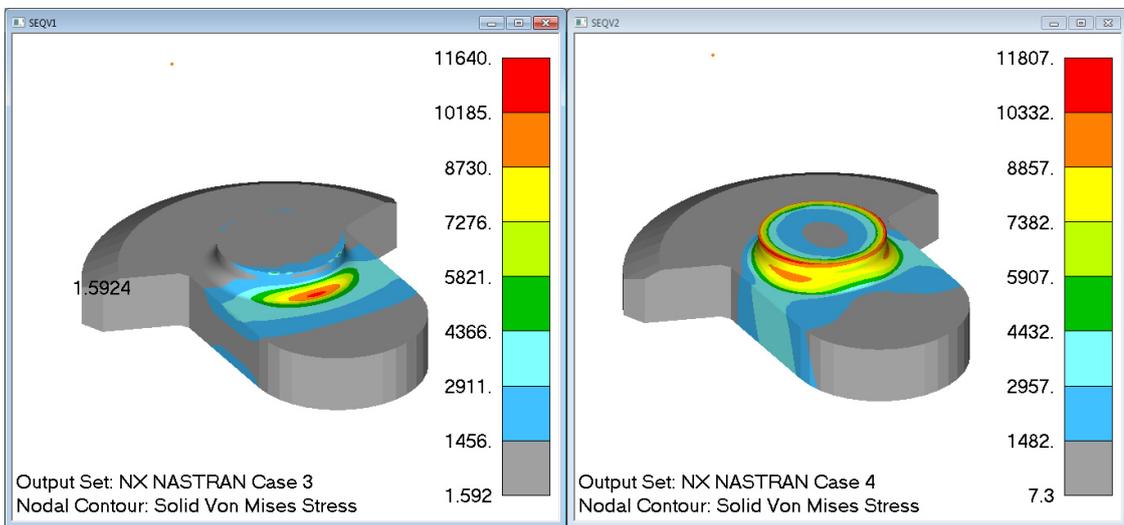


Abbildung 112: SEQV - Submodell - Mode 3 (links) und Mode 4 (rechts)

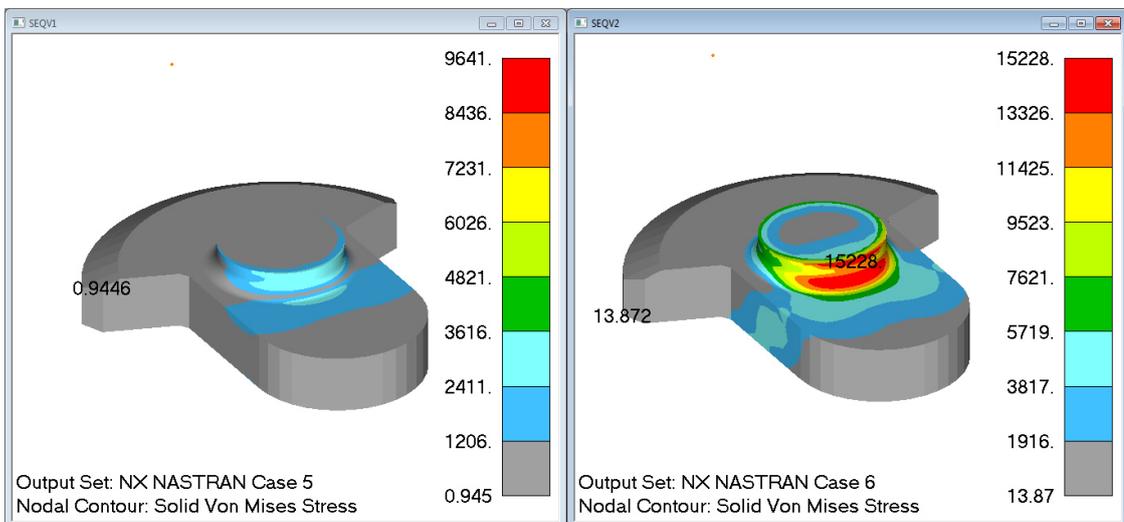


Abbildung 113: SEQV - Submodell - Mode 5 (links) und Mode 6 (rechts)

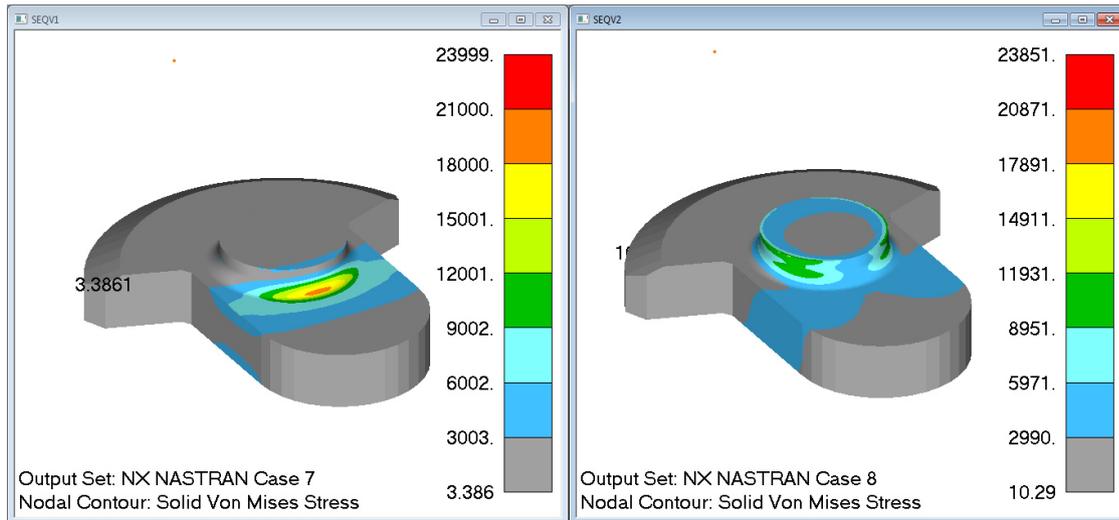


Abbildung 114: SEQV - Submodell - Mode 7 (links) und Mode 8 (rechts)

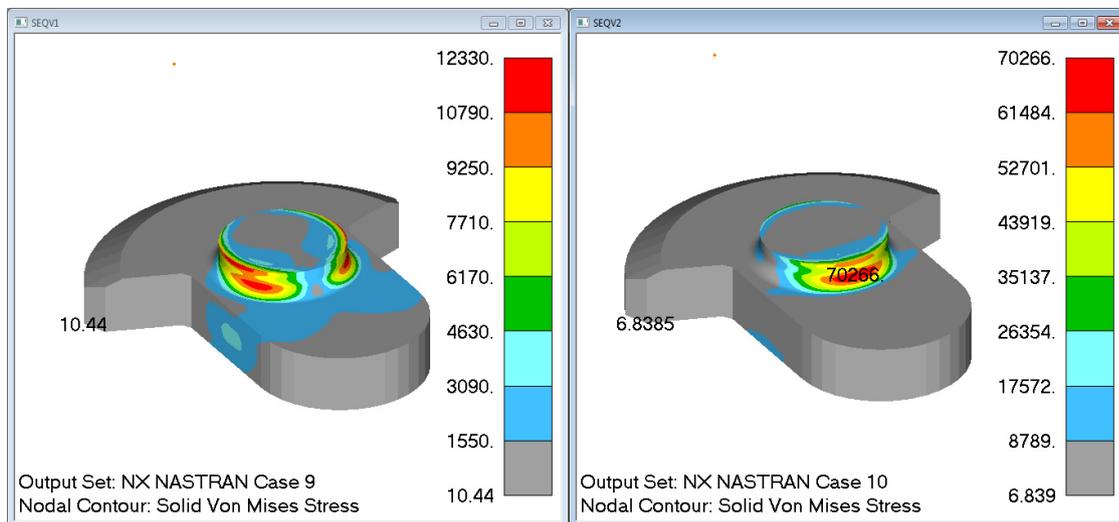


Abbildung 115: SEQV - Submodell - Mode 9 (links) und Mode 10 (rechts)

Die Größe der Spannungen ist hier noch nicht von Belang, da erst durch die Superposition der modalen Einheitslastfälle eine reale Spannungsverteilung folgt.

Für die Lebensdaueranalyse in winLIFE wurden nur die Knoten an der Oberfläche des Übergangsradius des Zapfens zur Kurbelwange berücksichtigt. Abbildung 116 und Abbildung 117 zeigen den Contourplot der Schadensumme am Submodell, basierend auf den Ergebnissen der Analyse RFlex_e20r2_d1. Wie zu erwarten war, führt die Detailanalyse zu einer höheren Schädigung.

Zur Bestätigung der Methode der Submodelltechnik wird noch eine weitere Betrachtung angestellt. Die an der Position der Referenzknoten des Gesamtmodells liegenden Knoten des Submodells müssten einen skalierten Vergleichsspannungsverlauf – entsprechend der Spannungserhöhung durch das feinere FE-Netz – aufweisen. Auch die Darstellungen der Hauptspannungswinkel sowie des Hauptspannungsverhältnisses müssten ähnlich zur

Lösung des Gesamtmodells sein. Die Zuordnung der Nummern der Auswerteknoten im Gesamt- zu denen des Submodells ist in Tabelle 14 ersichtlich.

Tabelle 14: Zuordnung der Auswerteknoten - Gesamt- zu Submodell

Gesamtmodell	Submodell
911	34118
912	34190

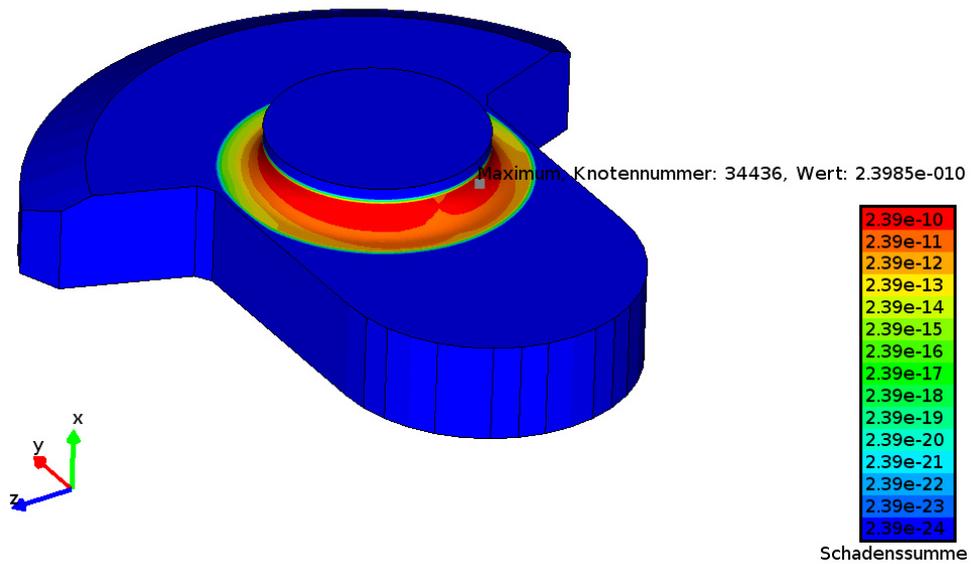


Abbildung 116: Schadenssumme Submodell - RFlex_e20r2_d1

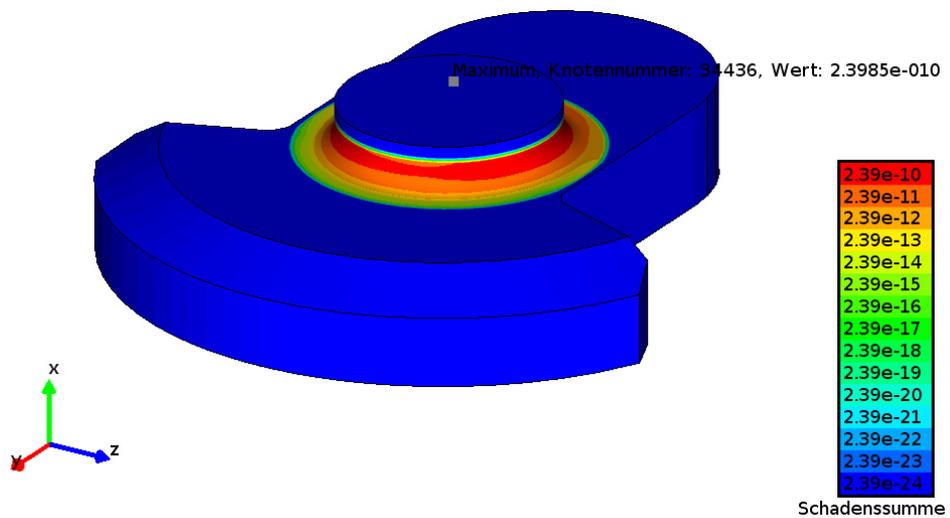


Abbildung 117: Schadenssumme Submodell - RFlex_e20r2_d1

Den Vergleich der Schadensumme an den Auswerteknoten zeigt die folgende Tabelle.

Tabelle 15: Schadensumme Gesamt- vs. Submodell – RFlex_e20r2_d1

	Gesamtmodell	Submodell
N911 / N34118	1.26E-11	1.967E-11
N912 / N34190	2.68E-12	2.598E-11

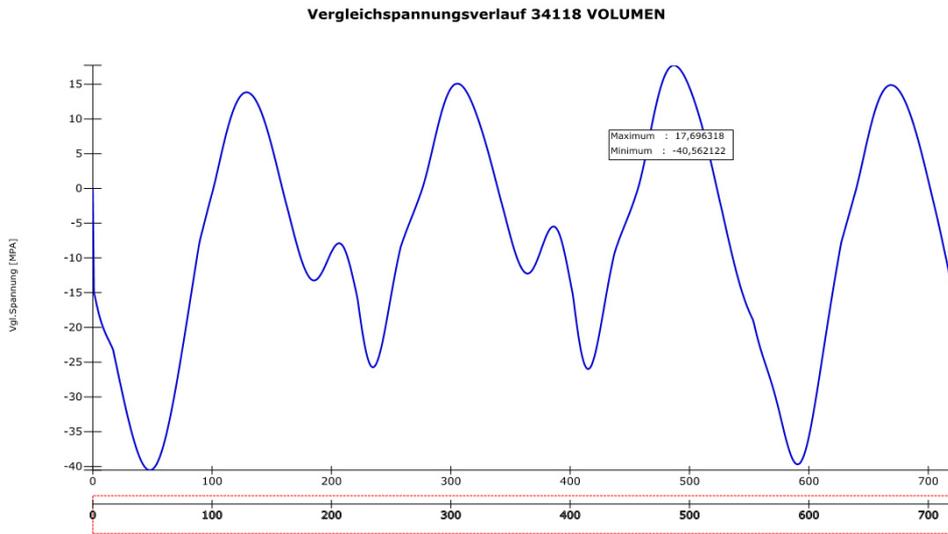


Abbildung 118: Vergleichsspannungsverlauf (STM) - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1

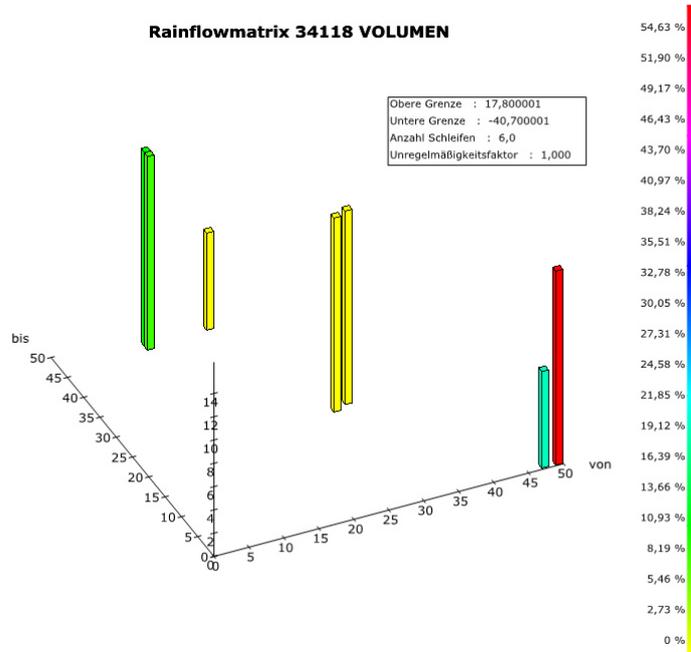


Abbildung 119: RM - N34118 Submodell– RFlex_e20r2_d1

Der Vergleichsspannungsverlauf an den beiden Auswerteknoten des Submodells ist tatsächlich vergleichbar. Das Spannungsniveau liegt über dem des Gesamtmodells. Der Verlauf des Hauptspannungswinkels sowie des Hauptspannungsverhältnisses ist ebenso mit dem der Lösung des Gesamtmodells vergleichbar.

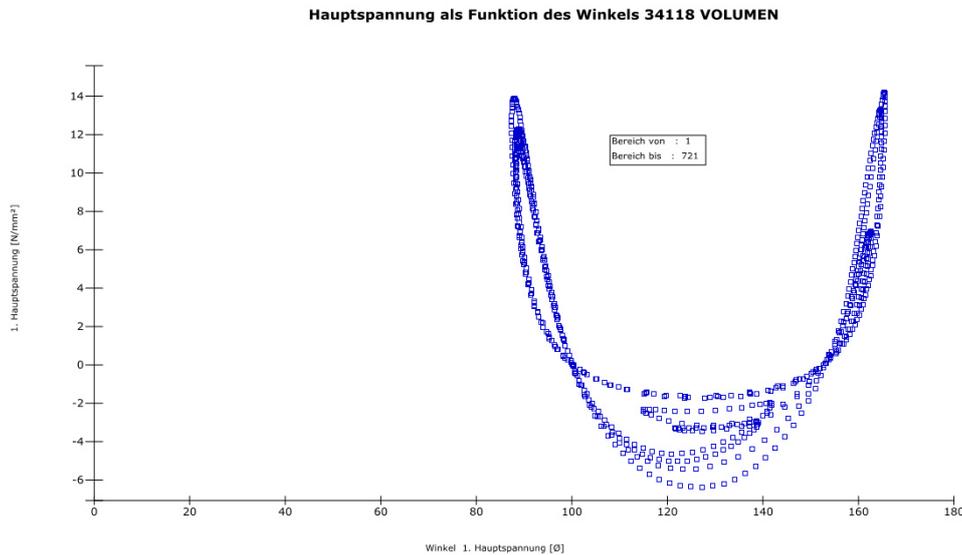


Abbildung 120: S1 vs. Winkel - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1

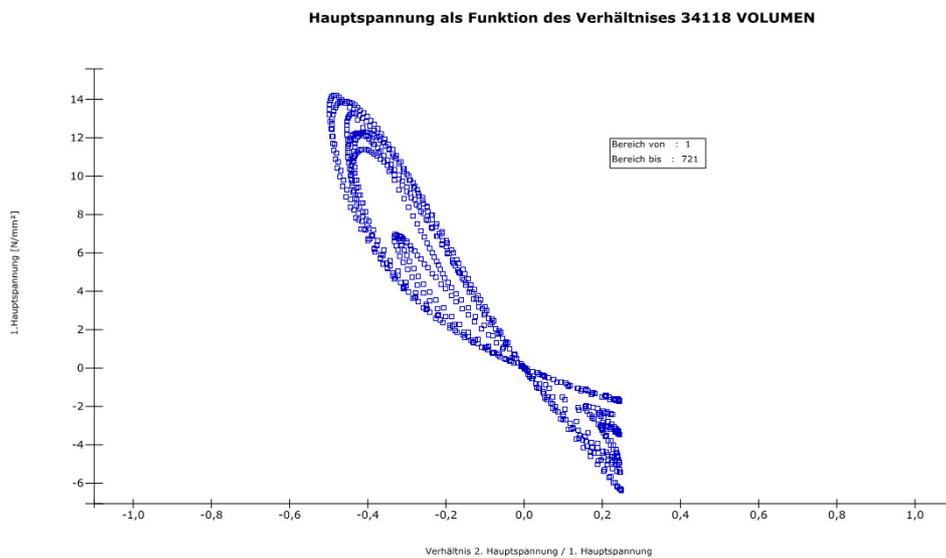


Abbildung 121: S1 vs. S2/S1 - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1

Aus der guten Qualität der Ergebnisse bestätigt sich die Eignung der Submodelltechnik im Kontext der Superposition von modalen Einheitslastfällen zur Lebensdaueranalyse.

Die vollständige Darstellung der winLIFE Ergebnisse der Knoten des Submodells der Modellvariante RFlex_e20r2_d1 ist im Anhang Teil 2 enthalten.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im abschließenden Kapitel werden die bisher gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und eine Bewertung aus Sicht des Autors vorgenommen. Die Anforderungen für eine Umsetzung der Methode in der Lebensdaueranalysesoftware winLIFE werden diskutiert. Der abschließende Ausblick zeigt weitere Schritte für die fundierte Anwendung der Methode auf.

7.1 Zusammenfassung

Die Lebensdaueranalyse basierend auf Spannungen aus dynamischen Analysen stellt eine rechenintensive Aufgabe im Zuge der Produktentwicklung von mechanischen Komponenten des Maschinen- und Fahrzeugbaus dar. Die Lebensdaueranalyse selbst benötigt als Eingabegröße den Spannungstensor-Zeitverlauf für jede zu analysierende Stelle eines Bauteils. Dieser Verlauf der Spannungskomponenten kann auf messtechnischem Wege - z. B. durch die Verwendung von Dehnungsmessstreifen - bestimmt werden, wozu jedoch schon ein Prototyp der Struktur mit einer Prüfeinrichtung vorhanden sein muss. Diese zeit- und kostenintensive Vorgehensweise wird zunehmend durch die Verwendung von Rechenmodellen - sogenannten virtuellen Prototypen - ersetzt. Numerische Simulationsverfahren wie die Finite Elemente Methode (FEM) oder die Mehrkörperdynamik (MKS), werden zu diesem Zweck verwendet. Auch für die Lebensdaueranalyse kommen spezielle Rechnerprogramme zum Einsatz, um die rechenintensiven Operationen durchzuführen. Die Methode der kritischen Schnittebene stellt dabei den Stand der Technik bei Lebensdaueranalysen multiaxialer Spannungszustände (MUX) dar.

Bei dynamischen Aufgabenstellungen sind Massen- und Dämpfungseffekte nicht zu vernachlässigen, ebenso ist die Frequenz der Belastung von Relevanz. Der Spannungstensor-Zeitverlauf kann als Resultat einer nichtlinear dynamischen FEM oder MKS Analyse für die nachfolgende Lebensdaueranalyse verwendet werden. Dabei fällt jedoch eine große Datenmenge - abhängig von der abzubildenden Frequenz des Signals und von der Anzahl der Nachweispunkte - an, die verarbeitet werden muss. Mit der Methode der modalen Analyse eröffnet sich eine weitaus effizientere Lösungsstrategie. Durch das Einführen von generalisierten Koordinaten werden die Bewegungsgleichungen der einzelnen Freiheitsgrade entkoppelt, was zu einer effizienteren Lösung des Gleichungssystems führt. Hinsichtlich der anfallenden Datenmenge bietet dieses Verfahren den Vorteil, dass der Verformungszustand - aus diesem ergibt sich über das Materialgesetz direkt der Verzerrungs- und der Spannungszustand - aus der Überlagerung der Eigenvektoren der Struktur folgt. Für die oftmals große Anzahl an Nachweispunkten - zumeist sind dies die Knoten der FEM Struktur - bedeutet dies, dass neben dem Zeitverlauf der generalisierten

Koordinaten - deren Anzahl ist im Vergleich zu der Anzahl der Knoten des Modells meist sehr gering - nur die zu den verwendeten Eigenvektoren korrespondierenden Spannungsverteilungen berechnet werden müssen. Durch Superposition dieser „modalen Einheitslastfälle“ wird in der Lebensdaueranalysesoftware die Spannungstensor-Zeitfunktion gebildet.

Wird diese Technik auf Teilbereiche des Rechenmodells angewandt spricht man von sogenannten modal reduzierten Strukturen, Substrukturen oder auch von Super-elementen. Die Methode der „Component Mode Synthesis“ (CMS) stellt das meistverwendete Verfahren zur Reduktion der Bewegungsgleichungen von Substrukturen dar. Die Master Freiheitsgrade an den Schnittstellenknoten der Teilgebiete werden durch statische Kondensation transformiert und mit den „inneren“ Moden der Substruktur angereichert. Diese Superelemente können in Gesamtmodellen mit nichtlinearem Verhalten verwendet werden.

Anhand des Anwendungsbeispiels einer Kurbelwelle eines 4-Zylinder Verbrennungsmotors konnte die Eignung des beschriebenen Verfahrens zum Zweck der Lebensdaueranalyse gezeigt werden. Der formelle Ablauf entspricht dabei dem der statischen Superposition, da für die Bildung des Spannungstensors die Frage, ob natürliche oder generalisierte Koordinaten überlagert werden, nicht von Belang ist. Die Methode der Submodelltechnik kann zur präzisen Analyse von Detailbereichen bei beiden Methoden gleichermaßen eingesetzt werden.

Ist die Methode der „modalen Superposition“ wirklich eine gleichwertige Methode zur direkten Analyse des Gleichungssystems, jedoch mit einem zusätzlichen Geschwindigkeitsvorteil? Diese Frage muss mit „nein“ beantwortet werden, da die Frage nach der Genauigkeit der Ergebnisse die Schwachstellen der Methode aufzeigt. Für den theoretischen Fall, dass alle Moden des Rechenmodells - diese entsprechen der Anzahl der Freiheitsgrade desselben - bei der modalen Methode verwendet würden, wäre die Gleichwertigkeit der Ergebnisse gegeben. In der Praxis beschränkt man sich aber auf eine geringe Anzahl von Eigenformen, da darin ja der Vorteil des Verfahrens liegt. Daraus folgt jedoch direkt eine Abweichung der Ergebnisse. Solange diese hinreichend klein und somit akzeptabel sind, kann das Verfahren der „modalen Superposition“ erfolgreich eingesetzt werden. Die Beurteilung der Genauigkeit nimmt also eine zentrale Rolle bei der Frage nach der Anwendbarkeit ein.

Beim Anwendungsbeispiel der Kurbelwelle wurde die direkte Lösung des Gleichungssystems als Referenzlösung herangezogen. In der Praxis wird es jedoch auch erforderlich sein, die Genauigkeit dieses Modells zu hinterfragen. Der Abgleich mit Messungen scheint daher nicht nur ratsam, sondern vielmehr erforderlich. Vor allem die Frage nach der Güte der Dämpfungsabbildung lässt sich nur schwer ohne messtechnisch ermittelte Ergebnisse beantworten. Die modale Methode bietet hier sogar den Vorteil der besseren Zuordnung frequenzabhängig gemessener Dämpfungswerte. Die selektive Auswahl der zu berücksichtigenden Eigenmoden bietet zusätzlich Potential für eine effiziente und

hinreichend genaue Analyse. Durch die Verwendung von Vergleichskriterien wie z. B. dem MAC Kriterium können die Schwingformen einzelner Berechnungsvarianten untereinander oder mit Messergebnissen anschaulich gegenübergestellt und abgeglichen werden.

Ist das Verfahren der Superposition von modalen Einheitslastfällen mit modal reduzierten Strukturen nun geeignet für eine zuverlässige Lebensdaueranalyse? Diese Frage kann eindeutig mit „ja“ beantwortet werden. Voraussetzung dafür ist jedoch die zuvor erörterte Prüfung der Abbildungsgenauigkeit, die durchaus mit hohem Aufwand verbunden sein kann.

In Bezug auf das Anwendungsbeispiel der Kurbelwelle sei noch ein weiterer Aspekt bedacht. Wie in der Beschreibung des Beispiels angemerkt wurde, ist eine direkte Analyse des Gleichungssystems für reale Belastungsszenarien aus wirtschaftlichen Gründen nicht sinnvoll und somit keine Alternative. Der Vergleich kann folglich nur zur dynamischen Analyse von Balken-Feder-Masse-Modellen angestellt werden, bei denen die dynamischen Schnittgrößen und Beschleunigungen als quasistatische Belastungen auf FE Modelle übertragen werden. (Diese Methode wurde in der Vergangenheit durchaus erfolgreich eingesetzt.) Die Genauigkeit dieses Verfahrens wird jedoch, aufgrund der Einschränkungen in der geometrischen Abbildung, geringer sein ([KfV] S. 167). Die modale Superposition von Einheitslastfällen mit Substrukturen ist somit für diesen Anwendungsfall die bessere Alternative.

7.2 Anforderungen für die Umsetzung in winLIFE

Die Methode der Superposition von generalisierten (modalen) Einheitslastfällen kann bereits jetzt in der Lebensdaueranalysesoftware winLIFE umgesetzt werden, da der formelle Ablauf identisch mit dem der statischen Superposition ist. Die Bereitstellung der generalisierten (modalen) Spannungen sowie des Verlaufs der generalisierten (modalen) Koordinaten ist jedoch noch mit erheblichem Aufwand des Benutzers verbunden. Durch Umformatieren müssen die Ergebnisse erst in eine für winLIFE lesbare Form gebracht werden. Die Erweiterung der winLIFE internen Schnittstellen zu den FEM bzw. MKS Programmen sollte dahingehend erfolgen, dass die - meist binären - Ergebnisdateien der modalen Analyse und/oder der Superelemente direkt verarbeitet werden können, wie dies für die aktuell implementierten Methoden bereits möglich ist.

7.3 Ausblick

Für die Anwendung der Methode der Superposition von generalisierten (modalen) Einheitslastfällen zum Zweck der Lebensdaueranalyse stellt die Frage nach der Abbildungsgenauigkeit das wesentliche Entscheidungskriterium für oder gegen einen Einsatz derselben dar. Umfangreiche Messungen der dynamischen Eigenschaften der zu

analysierenden Komponenten sind ein Erfordernis für qualitativ hochwertige Berechnungen, wobei der Abgleich der Modelle mit den Messergebnissen mit Bedacht durchzuführen ist. Stehen keine Messdaten aus Prototypen oder Erfahrungswerte aus ähnlichen Problemstellungen zur Verfügung, sollte die Anwendung rechenintensiverer Verfahren, soweit dies wirtschaftlich vertretbar ist, in Erwägung gezogen werden. Kann die Problematik der Genauigkeit jedoch zufriedenstellend gelöst werden, bietet die Verwendung von modal reduzierten Strukturen zur Lebensdaueranalyse nach dem Verfahren der Superposition von modalen Einheitslastfällen großes Potential für eine wirtschaftliche Bearbeitung umfangreicher Analysen der Ermüdungsfestigkeit von Bauteilen unter dynamischen Belastungsbedingungen.

Die Auswirkung der Berücksichtigung der Dämpfung auf die Abbildungsgenauigkeit wurde in den durchgeführten Studien nicht tiefergehend untersucht, sie war jedoch eindeutig erkennbar. Die Recherchen in einschlägiger Fachliteratur zeigten, dass dieses Gebiet auch noch nicht umfassend wissenschaftlich aufgearbeitet bzw. in allgemein verfügbarer Literatur publiziert wurde. Weiterführende Studien sollten sich vor allem der Auswirkung unterschiedlicher Dämpfungsansätze auf die Abbildungsgenauigkeit von modal reduzierten Substrukturen widmen.

Literatur

- [HAB] Haibach Erwin:
Betriebsfestigkeit
Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2002
ISBN 3-540-43142-X
- [RVE] Radaj Dieter; Vormwald Michael:
Ermüdungsfestigkeit
Grundlagen für Ingenieure
3. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007
ISBN 978-3-540-71458-3
- [BSF] Bishop Neil; Sherratt Frank:
Finite Element Based Fatigue Calculations
NAFEMS Ltd, Glasgow, 2000
- [WL1] **Dokumentation zu winLIFE**
Version 4.0.x
Steinbeis Transferzentrum – Neue Technologien in der Verkehrs-
technik, Ulm, 2016
- [WL2] Willmerding Günter, Häckh Jakob:
Schulungsunterlagen winLIFE
Einführung in die rechnergestützte Lebensdauerberechnung und
rechnergestützte Lebensdauerberechnung für mehrachsige Bean-
spruchungen
Steinbeis Transferzentrum – Neue Technologien in der Verkehrs-
technik, Ulm, 2016

- [RMM] Muhs D., Wittel H., Jannasch D., Voßiek J.:
Roloff / Matek Maschinenelemente
Normung Berechnung Gestaltung
18. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2007
ISBN 978-3-8348-0262-0
- [IRH] Issler L., Ruoff H., Häfele P.:
Festigkeitslehre – Grundlagen
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2004
ISBN 3-540-40705-7
- [RSH] Rieg F., Steinhilper R.
Handbuch Konstruktion
Hanser Verlag, München 2012
ISBN 978-3-446-43000-6
- [KSF] Kienzler R., Schröder R.
Einführung in die höhere Festigkeitslehre
1. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg 2009
ISBN 978-3-540-89324-0
- [DTM] Dankert J., Dankert H.
Technische Mechanik
Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik
7. Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden 2013
ISBN 978-3-8348-1809-6
- [GHSW2] Gross D.; Hauger W.; Schröder J.; Wall W.:
Technische Mechanik 2
12. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014
ISBN 978-3-642-40965-3

- [GHSW3] Gross D.; Hauger W.; Schröder J.; Wall W.:
Technische Mechanik 3
13. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2015
ISBN 978-3-642-53953-4
- [GHW4] Gross D., Hauger W., Wriggers P.
Technische Mechanik 4
9. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014
ISBN 978-3-642-40999-8
- [DSA] Dresig Hans:
Schwingungen und mechanische Antriebssysteme
Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006
ISBN 978-3-540-26024-0
- [DHM] Dresig H., Holzweißig F.:
Maschinendynamik
5. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2004
ISBN 3-540-01362-8
- [WKM] Waller H.; Krings W.:
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
Bibliographisches Institut AG, Zürich, 1975
ISBN 3-411-01484-9
- [KFE] Klein Bernd:
FEM
Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode im
Maschinen und Fahrzeugbau
10. Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden, 2015
ISBN 978-3-658-06053-4

- [BFE] Bathe Klaus Jürgen:
Finite Elemente Methoden
2. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2002
ISBN 3-540-66806-3
- [LFE] Link Michael:
Finite Elemente in der Statik und Dynamik
4. Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden, 2014
ISBN 978-3-658-03556-3
- [NFE] Nasdala Lutz:
FEM - Formelsammlung Statik und Dynamik
3. Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden, 2015
ISBN 978-3-658-06629-1
- [FfP1] Groth C., Müller G.:
FEM für Praktiker - Band 1: Grundlagen
7. Auflage, Expert Verlag, Renningen 2002
ISBN 3-8169-1857-3
- [FfP2] Stelzmann U., Groth C., Müller G.:
FEM für Praktiker - Band 2: Strukturdynamik
3. Auflage, Expert Verlag, Renningen 2002
ISBN 3-8169-1817-4
- [ANS1] ANSYS
Mechanical APDL Substructuring Analysis Guide
ANSYS Release 18.0
Ansys Inc., 2017
- [NXN1] NX NASTRAN
Advanced Dynamic Analysis User's Guide
NX Nastran Release 11
Siemens Product Lifecycle Management Software Inc., 2016

- [NXN2] NX NASTRAN
Superelement User's Guide
NX Nastran Release 11
Siemens Product Lifecycle Management Software Inc., 2016
- [RD1] RECURDYN
RecurDyn Manual
RecurDyn Release V8R5
FunctionBay Inc., 2016
- [KFV] Köhler E., Flierl R.:
Verbrennungsmotoren
Motormechanik, Berechnung und Auslegung des Hubkolbenmotors
4. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2006
ISBN 978-3-528-43108-2
- [FKM] FKM Richtlinie
Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile
6. Auflage, VDMA Verlag, Frankfurt am Main 2012
ISBN 978-3-8163-0605-4
- [N1] DIN 50100
Schwingfestigkeitsversuch
Durchführung und Auswertung von zyklischen Versuchen mit konstanter Lastamplitude für metallische Proben und Bauteile
Ausgabedatum 2016-12, Beuth Verlag 2016
- [N2] ÖNORM EN 12663-1
Bahnanwendungen – Festigkeitsanforderungen an Wagenkästen von Schienenfahrzeugen
Teil1: Lokomotiven und Personenzüge (und alternatives Verfahren für Güterwagen)
Ausgabe: 2015-03-01, Österreichisches Normungsinstitut, Wien

- [DVS] DVS-Berichte Band 256
Festigkeit geschweißter Bauteile
Anwendbarkeit lokaler Nachweiskonzepte bei Schwingbeanspruchung
DVS Media GmbH, Düsseldorf 2009
ISBN 978-3-87155-583-1
- [GAI] Gaier C., Dannbauer H.:
An efficient critical plane method for ductile, semiductile and brittle materials
Fatigue 2006: 9th International Fatigue Congress Atlanta
4.5.-19.5.2006, Vortrag Nr. FT 436
- [KMD] Breitelschmidt M., Koutsovasilis P., Quarz V.:
Zur Modellierung und Simulation der Kolbenmaschinendynamik unter Berücksichtigung von Strukturelastizitäten
24th CADFEM Users' Meeting 2006, Stuttgart/Fellbach
25.10.-27.10.2006
- [AFM] Artner Wolfgang:
Forschungsmodul
Grundlagenuntersuchungen zum Themengebiet der Lebensdaueranalyse mit modal reduzierten Strukturen
Hochschule Mittweida, 2017

Anhang

Teil 1: Spannungsverläufe aus der RECURDYN Simulation (Kapitel 6.4).....	A1
Teil 2: winLIFE Ergebnisplots (Kapitel 6.5).....	A2
Teil 3: Mathcad Berechnungsblätter zum Einführungsbeispiel (Kapitel 5).....	A3

Anhang, Teil 1

Der Verlauf der v. Mises Vergleichsspannung (SEQV) an den beiden Referenzknoten Nr. 911 und Nr. 912 wird zur Diskussion der Ergebnisse der RECURDYN Analysen herangezogen. Die Darstellung der Verläufe der Spannungen der unterschiedlichen FFlex und RFlex Modellvarianten ist Inhalt dieses Anhangs.

Die Interpretation der Graphen, anhand einzelner Modellvarianten, wird in Kapitel 6.4.3.3 erläutert.

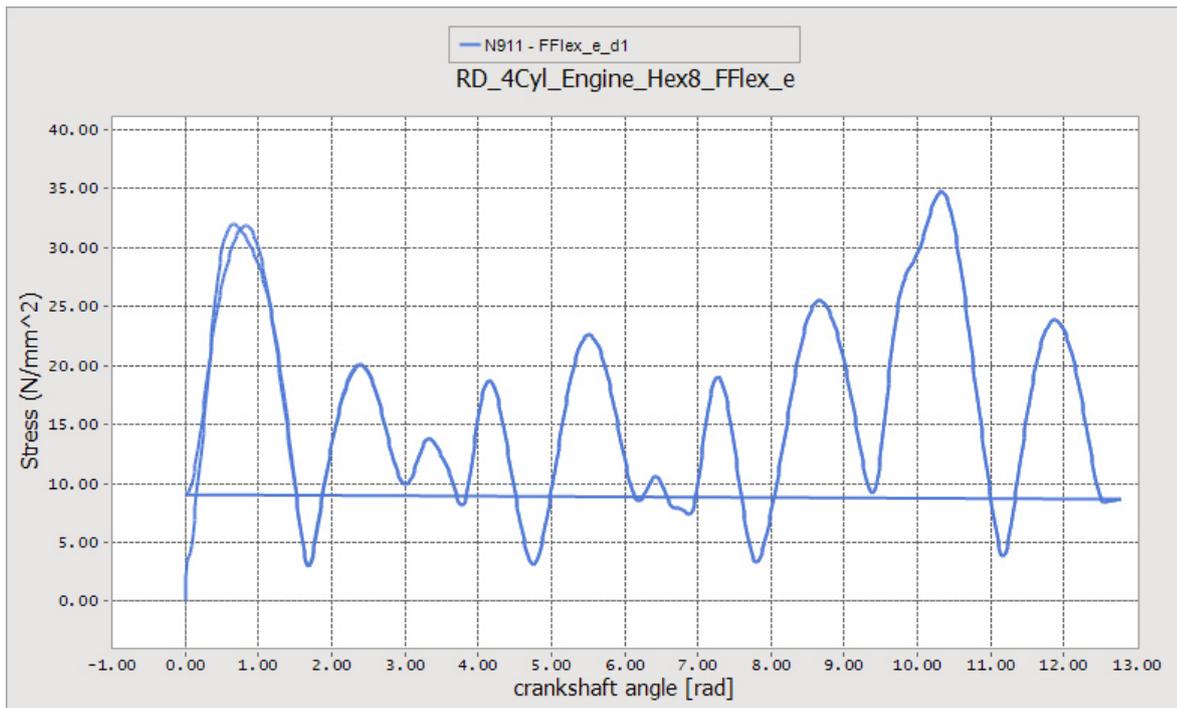


Abbildung A1 / 1: SEQV vs. Angle - N911 - FFlex_e_d1

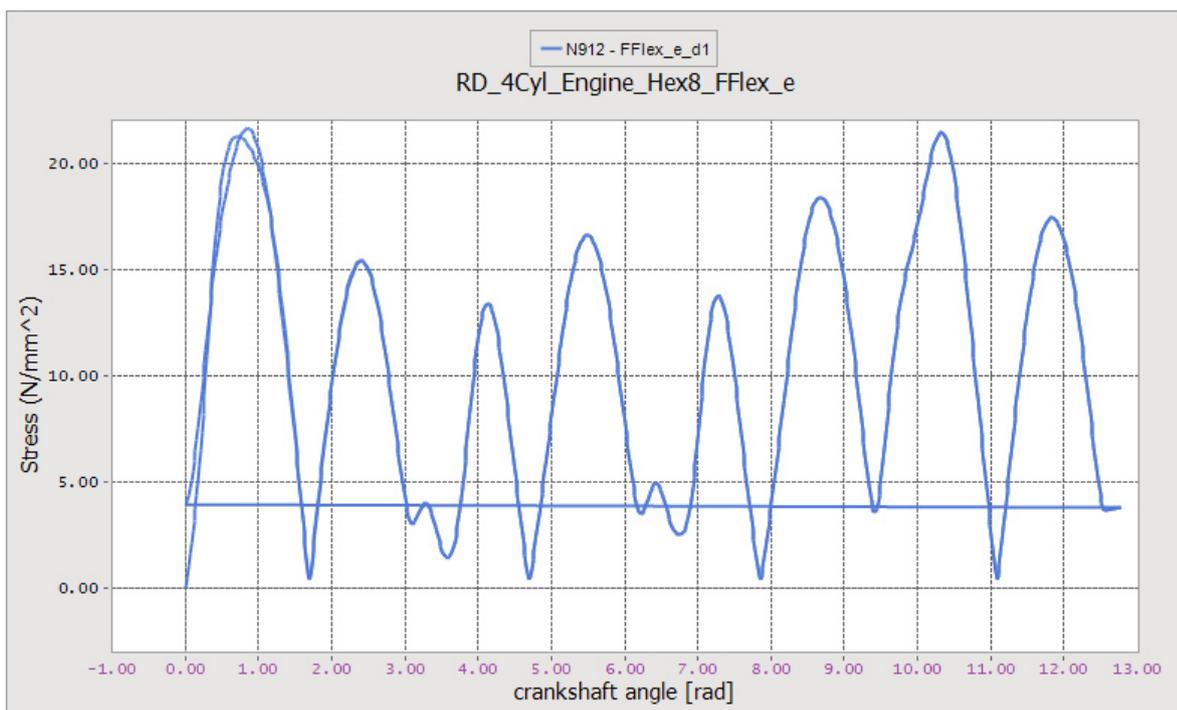


Abbildung A1 / 2: SEQV vs. Angle - N912 - FFlex_e_d1

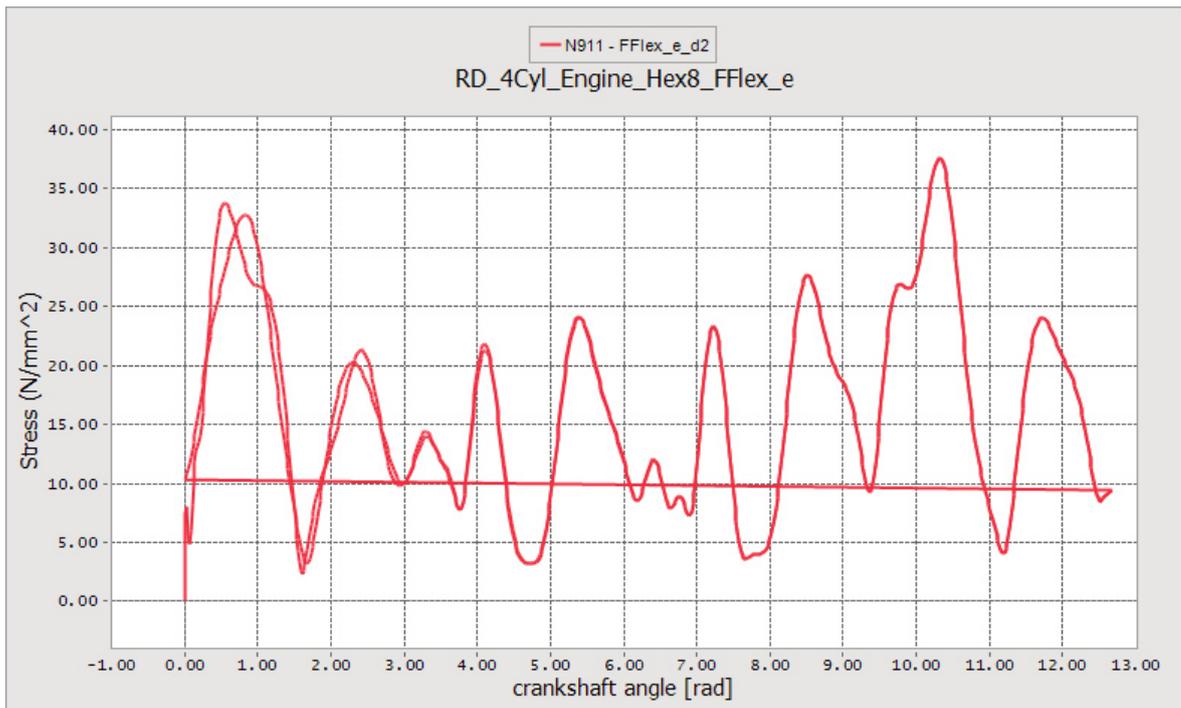


Abbildung A1 / 3: SEQV vs. Angle - N911 - FFlex_e_d2

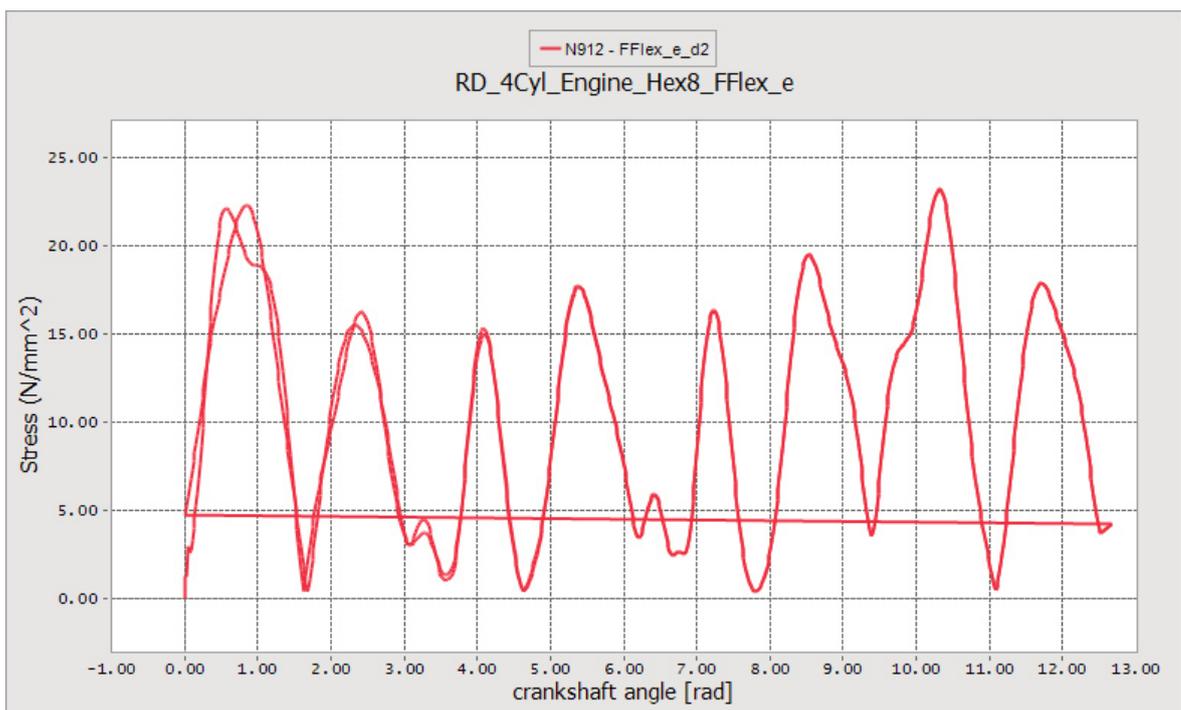


Abbildung A1 / 4: SEQV vs. Angle - N912 - FFlex_e_d2

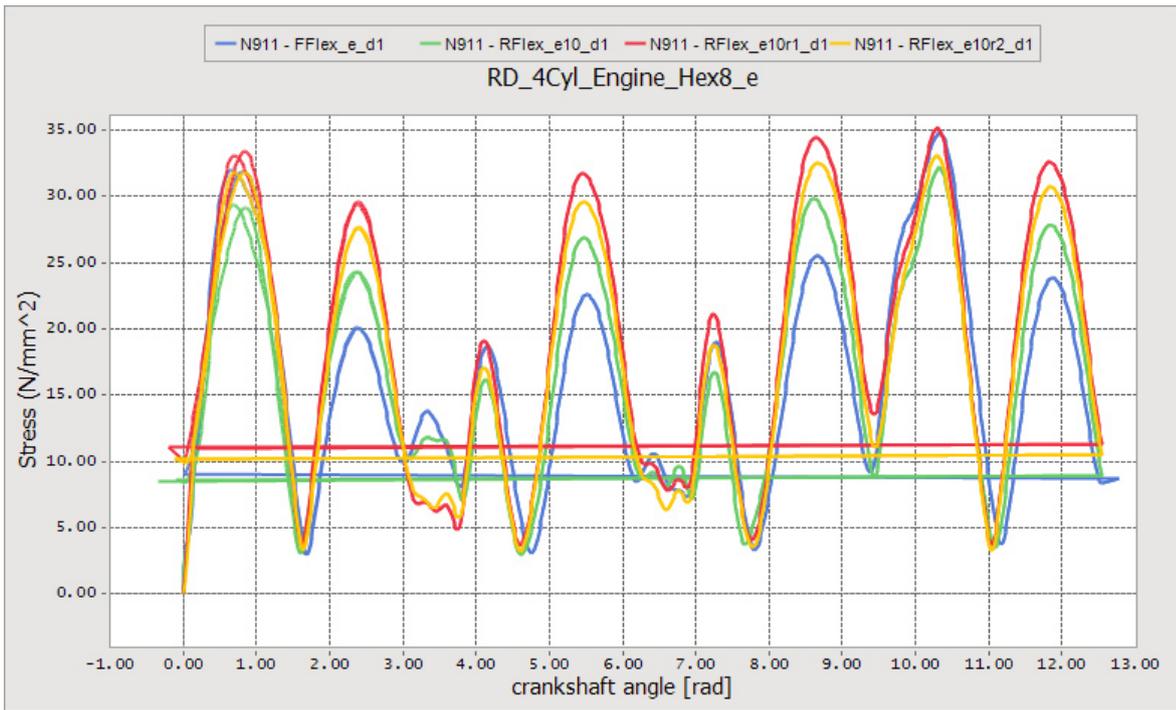


Abbildung A1 / 5: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e10%%_d1

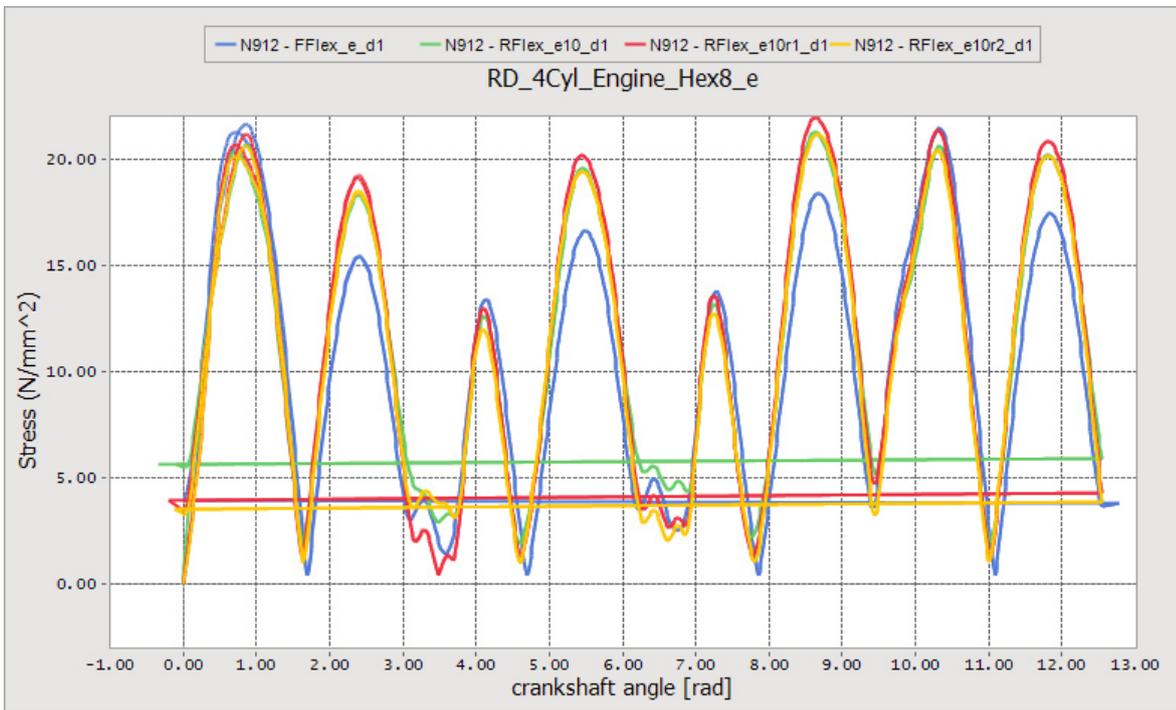


Abbildung A1 / 6: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e10%%_d1

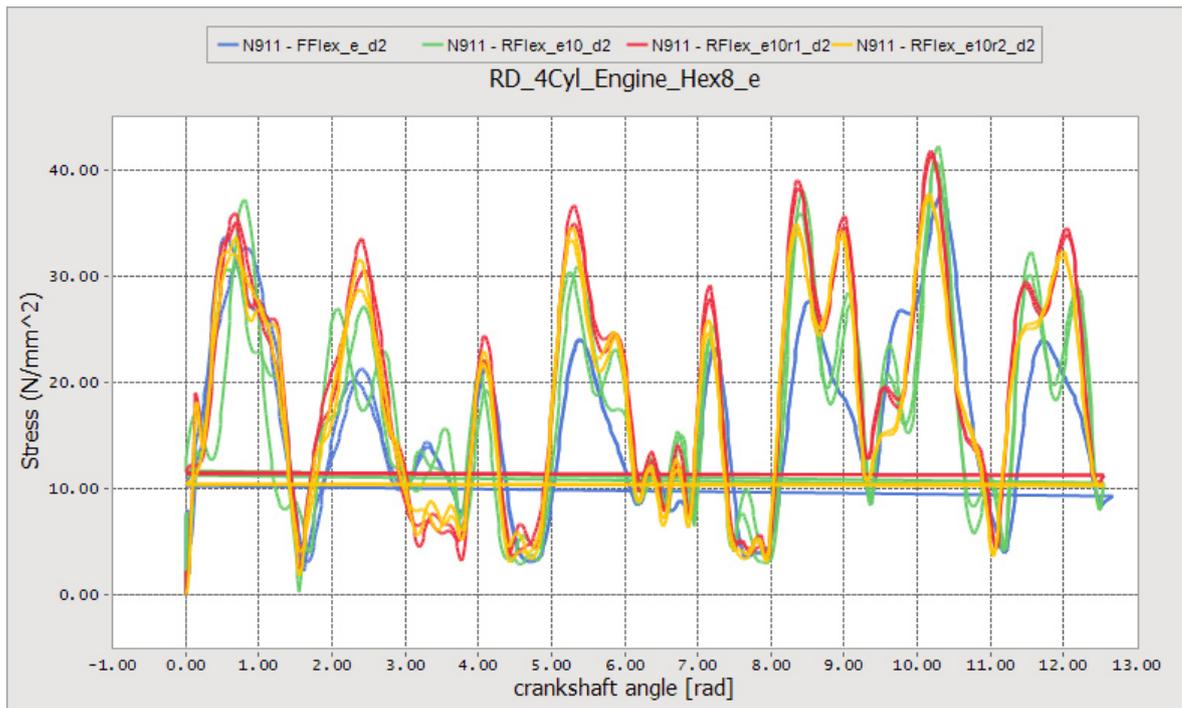


Abbildung A1 / 7: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e10%%_d2

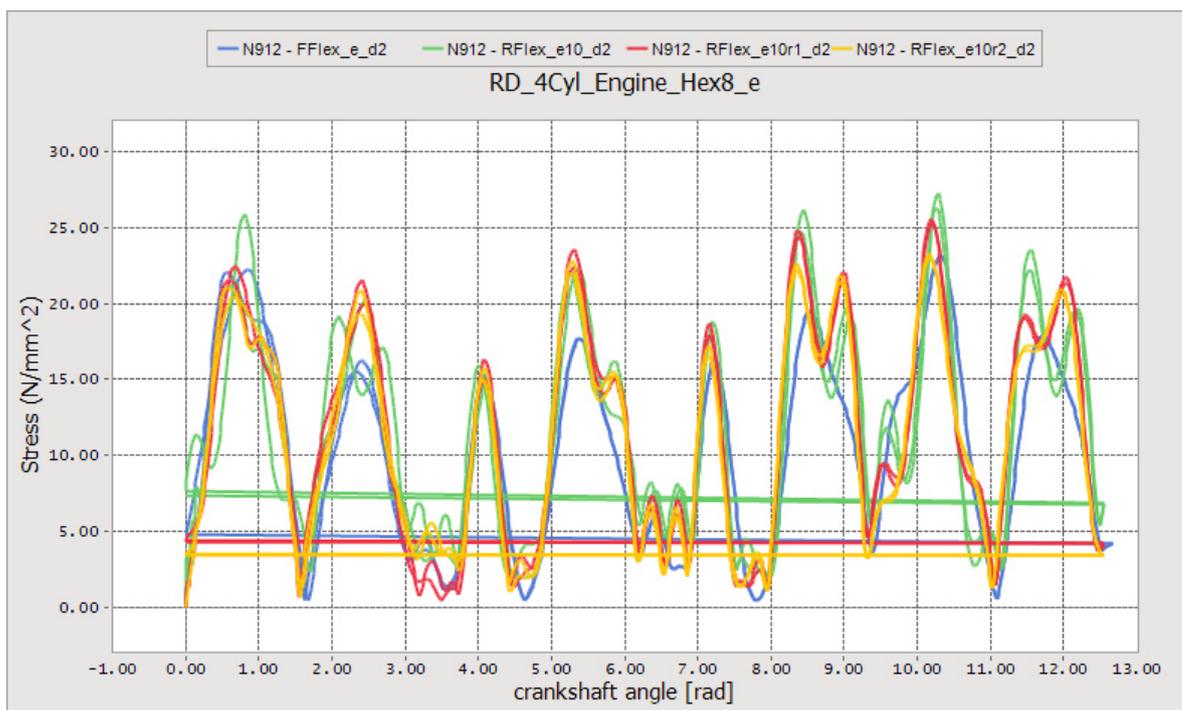


Abbildung A1 / 8: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e10%%_d2

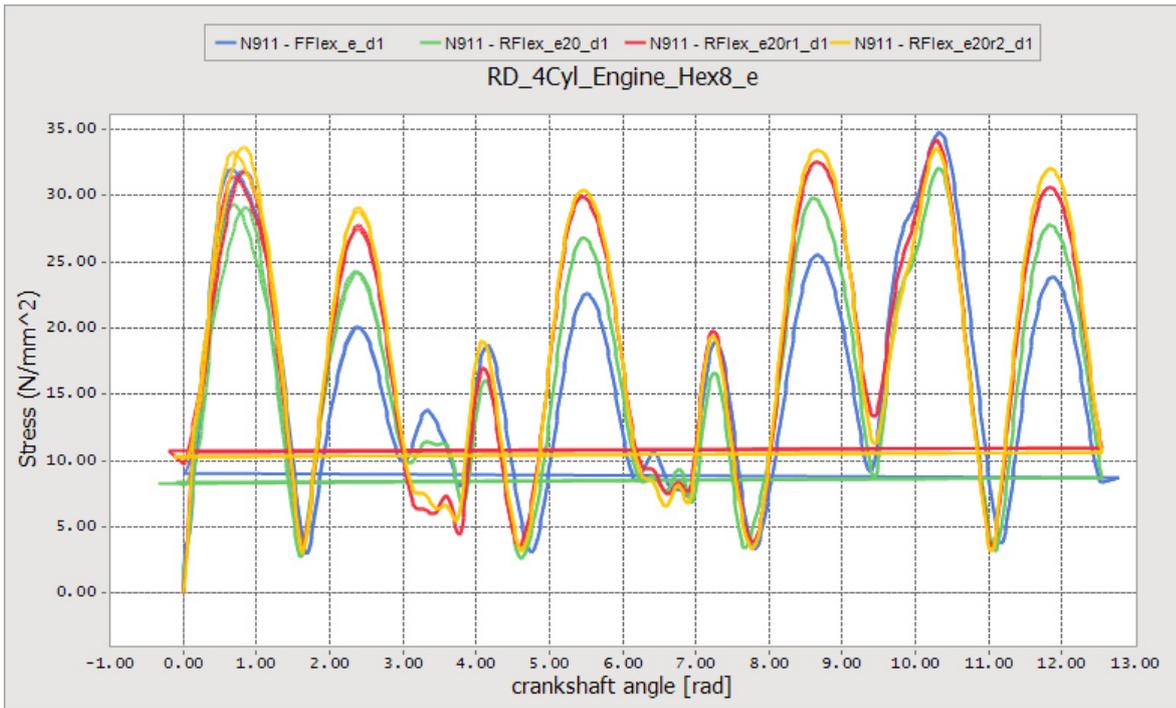


Abbildung A1 / 9: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e20%%_d1

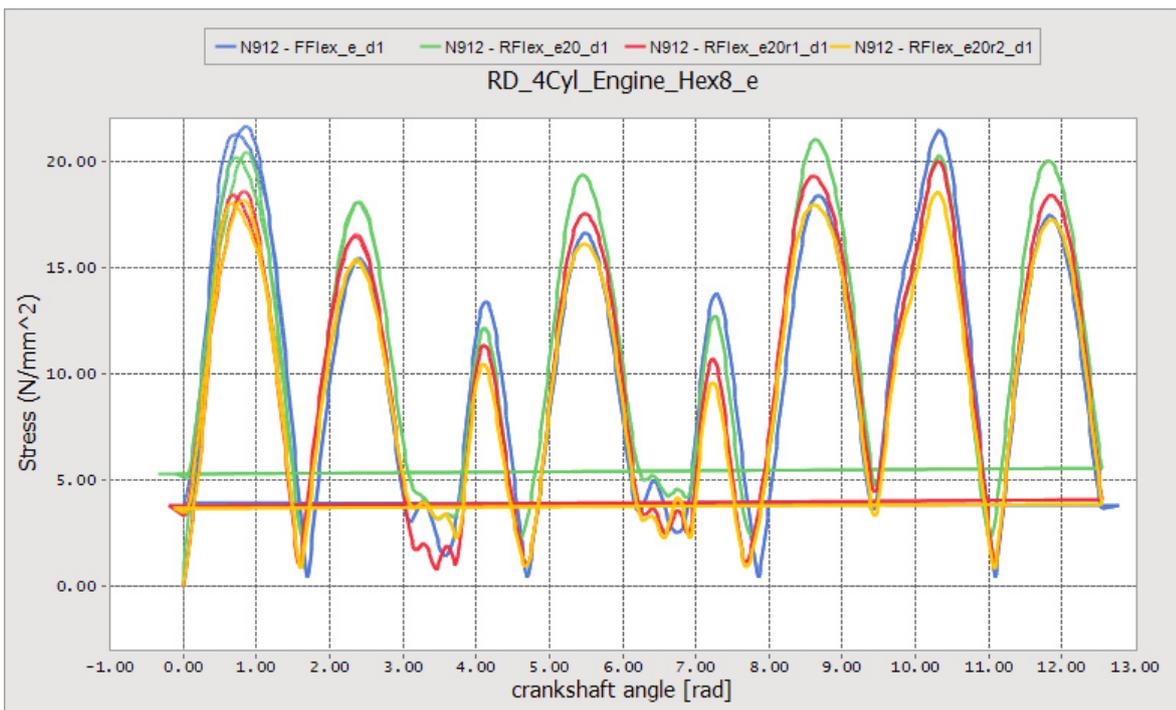


Abbildung A1 / 10: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e20%%_d1

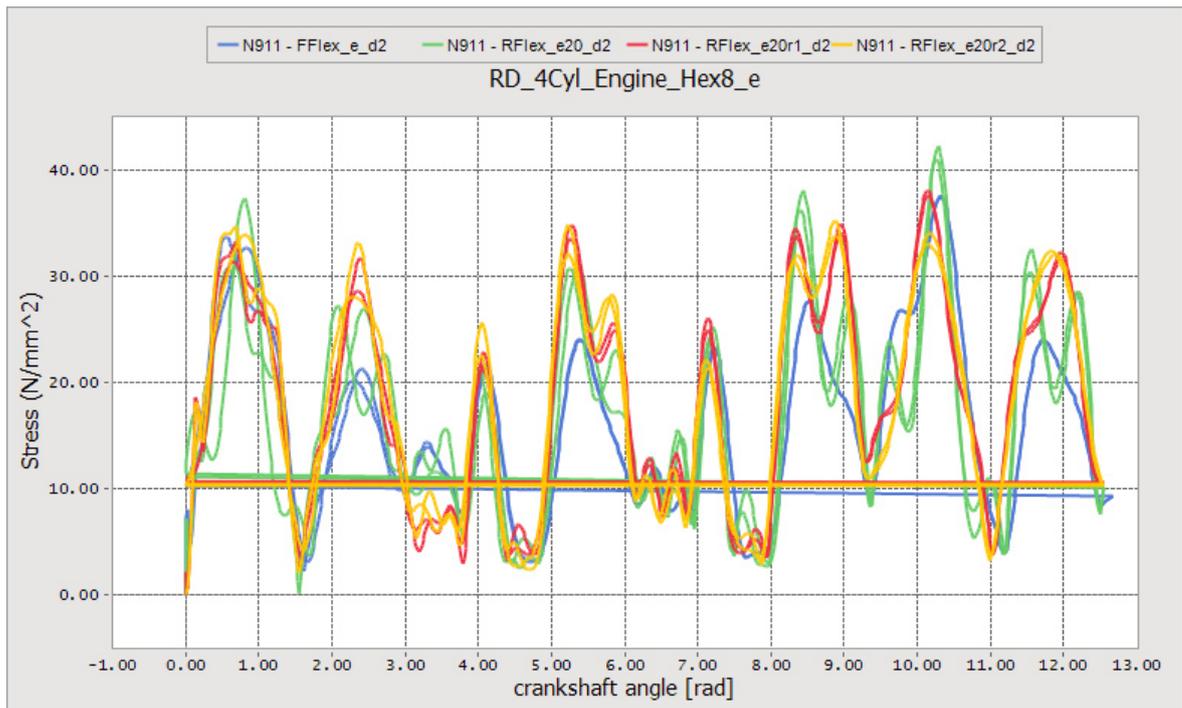


Abbildung A1 / 11: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e20%%_d2

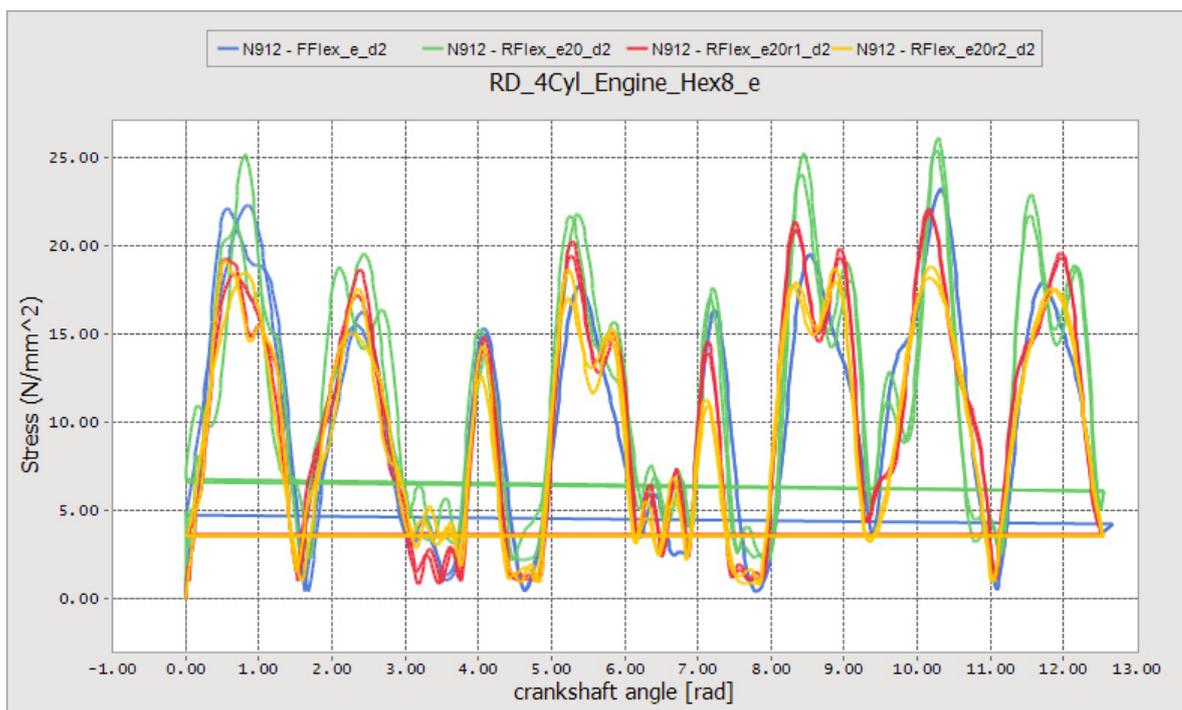


Abbildung A1 / 12: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e20%%_d2

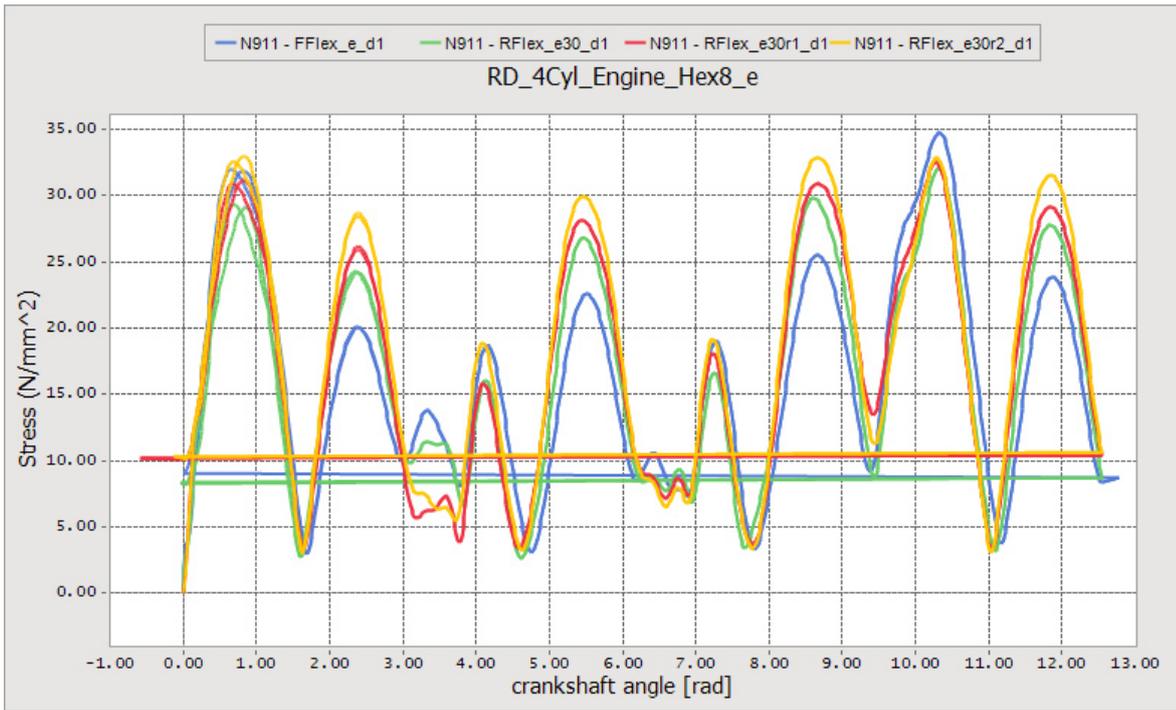


Abbildung A1 / 13: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e30%%_d1

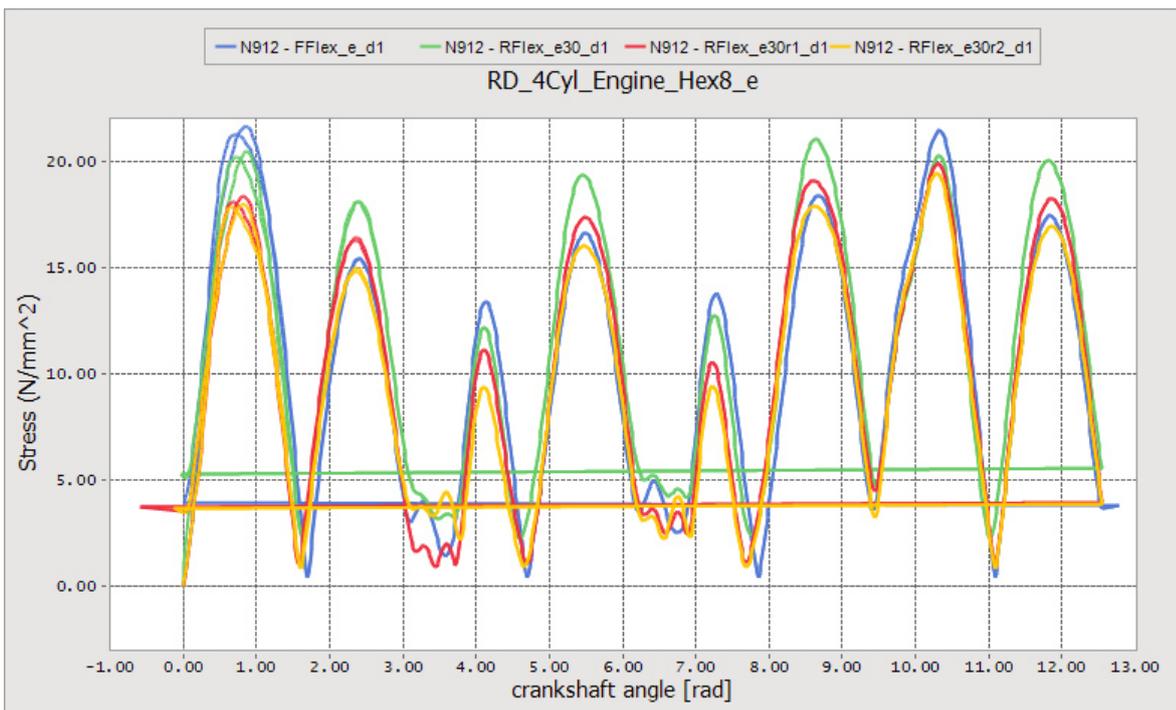


Abbildung A1 / 14: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e30%%_d1

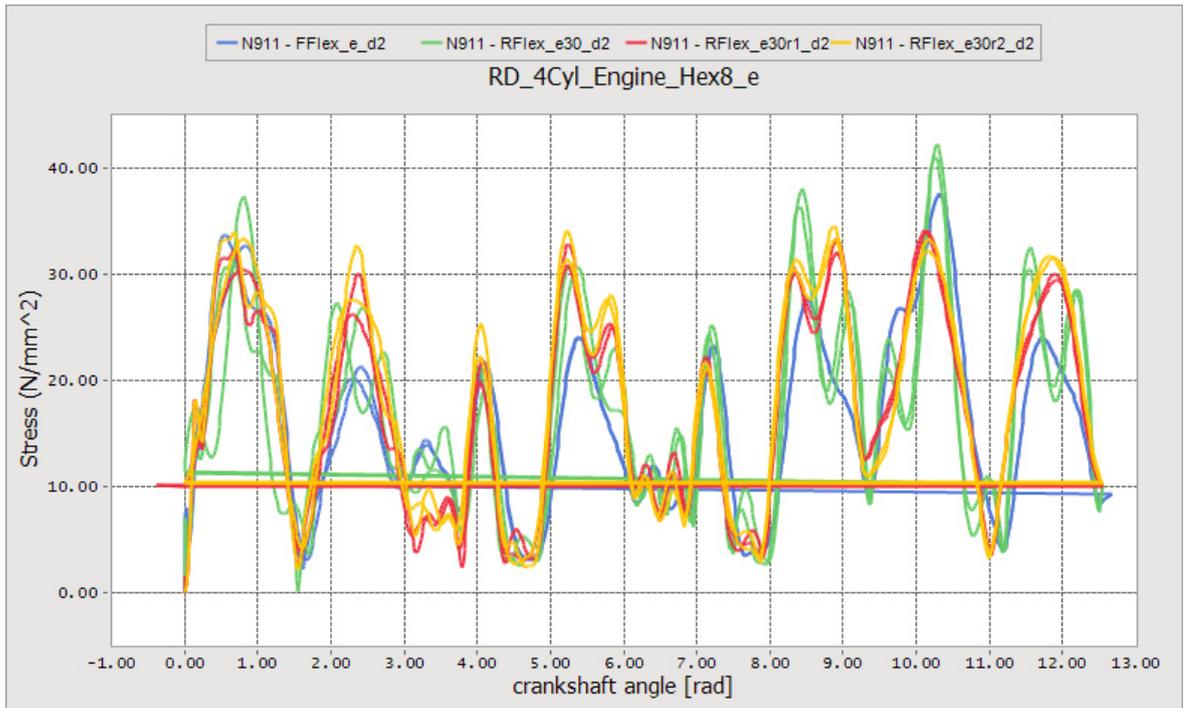


Abbildung A1 / 15: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e30%%_d2

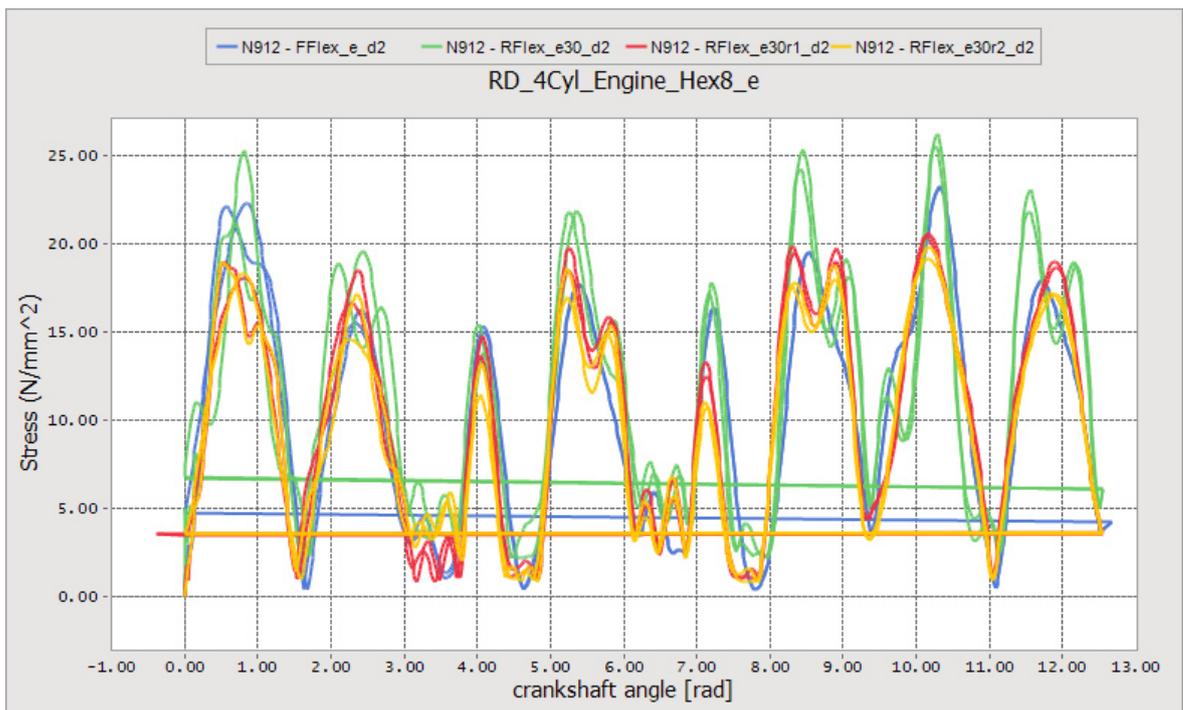


Abbildung A1 / 16: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e30%%_d2

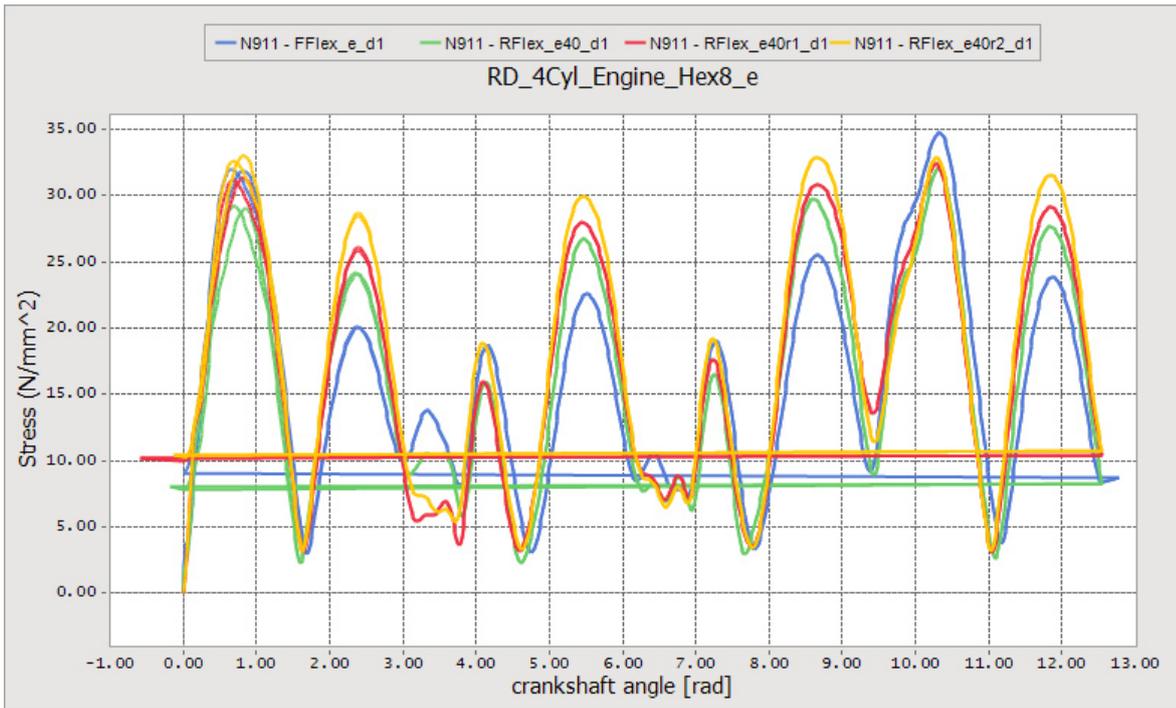


Abbildung A1 / 17: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e40%%_d1

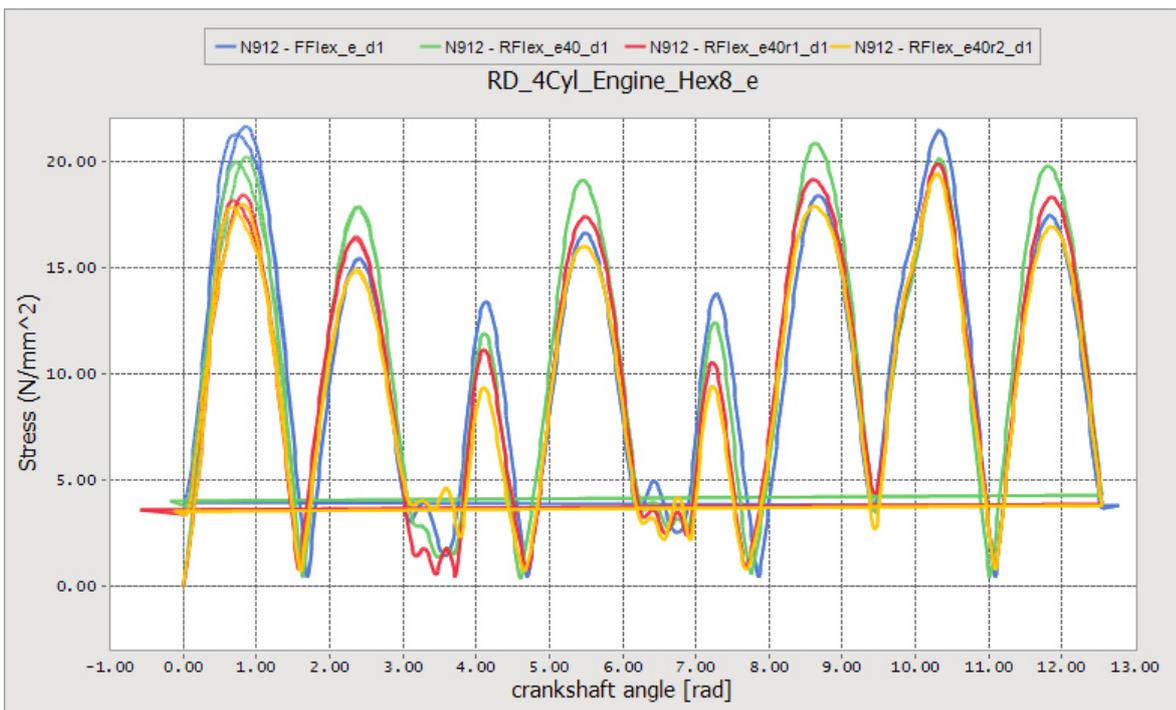


Abbildung A1 / 18: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e40%%_d1

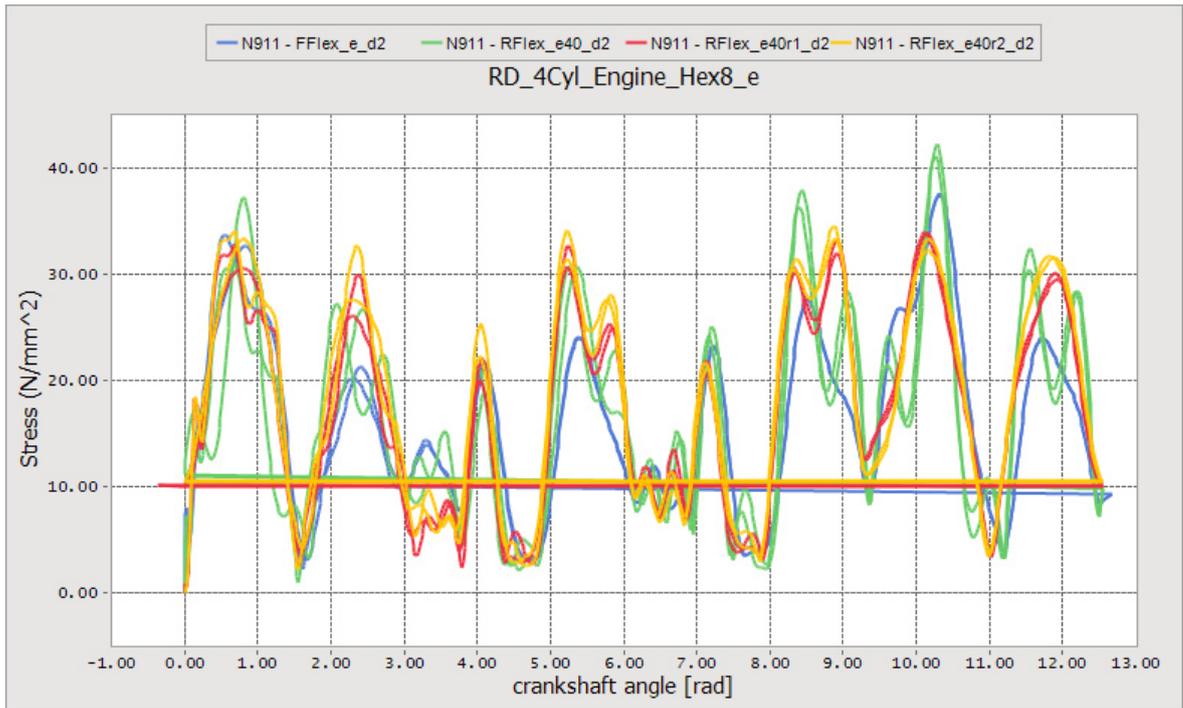


Abbildung A1 / 19: SEQV vs. Angle - N911 - RFlex_e40%_d2

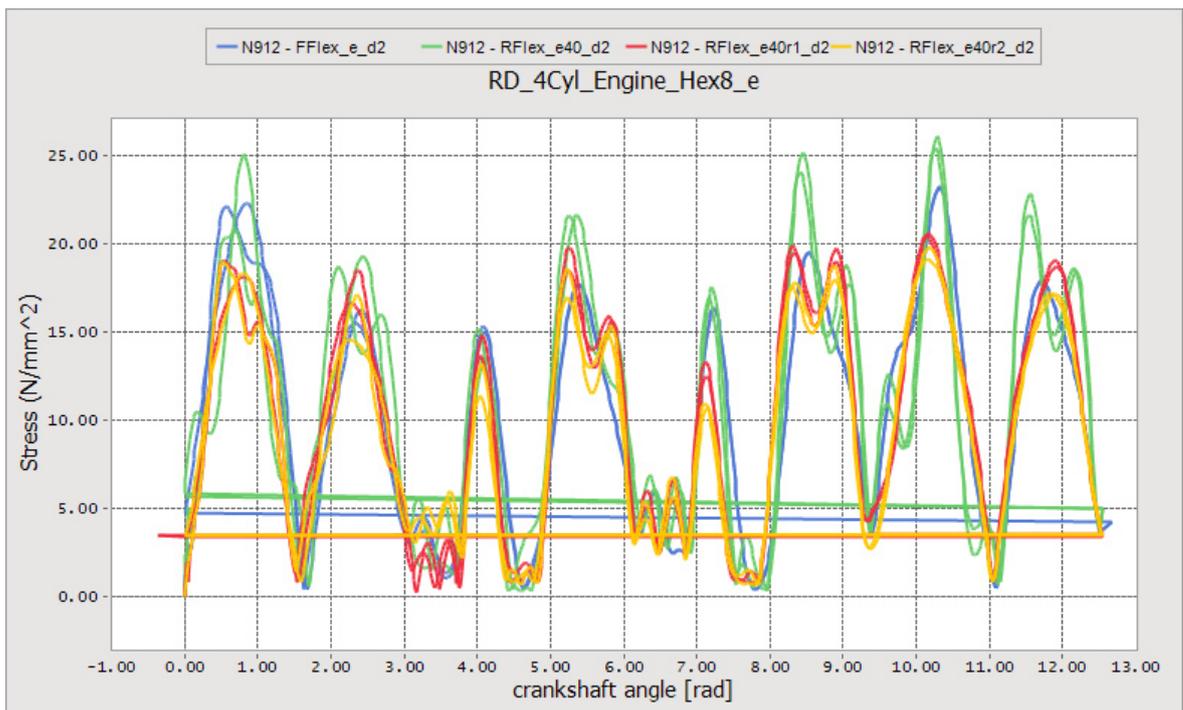


Abbildung A1 / 20: SEQV vs. Angle - N912 - RFlex_e40%_d2

Anhang, Teil 2

Die vollständige Sammlung - für alle durchgeführten Analysevarianten - der wichtigsten Ergebnisse der Lebensdaueranalyse mit winLIFE sind in diesem Anhang enthalten. Für jedes Berechnungsmodell und für jeden der beiden Referenzknoten Nr. 911 und Nr. 912 werden folgende Ergebnisse dargestellt:

- Wöhlerlinie mit dem Belastungskollektiv eines Verbrennungszyklus, mit Information über den Schädigungsanteil der jeweiligen Kollektivstufe (in Prozent).
- Vergleichsspannungsverlauf in der kritischen Schnittebene entsprechend der gewählten Theorie der „Spannungs Tensor Modifikation“.
- Erste Hauptspannung als Funktion des Winkels.
- Erste Hauptspannung als Funktion des Hauptspannungsverhältnisses.

Die Interpretation anhand ausgewählter Berechnungsvarianten kann Kapitel 6.5 entnommen werden.

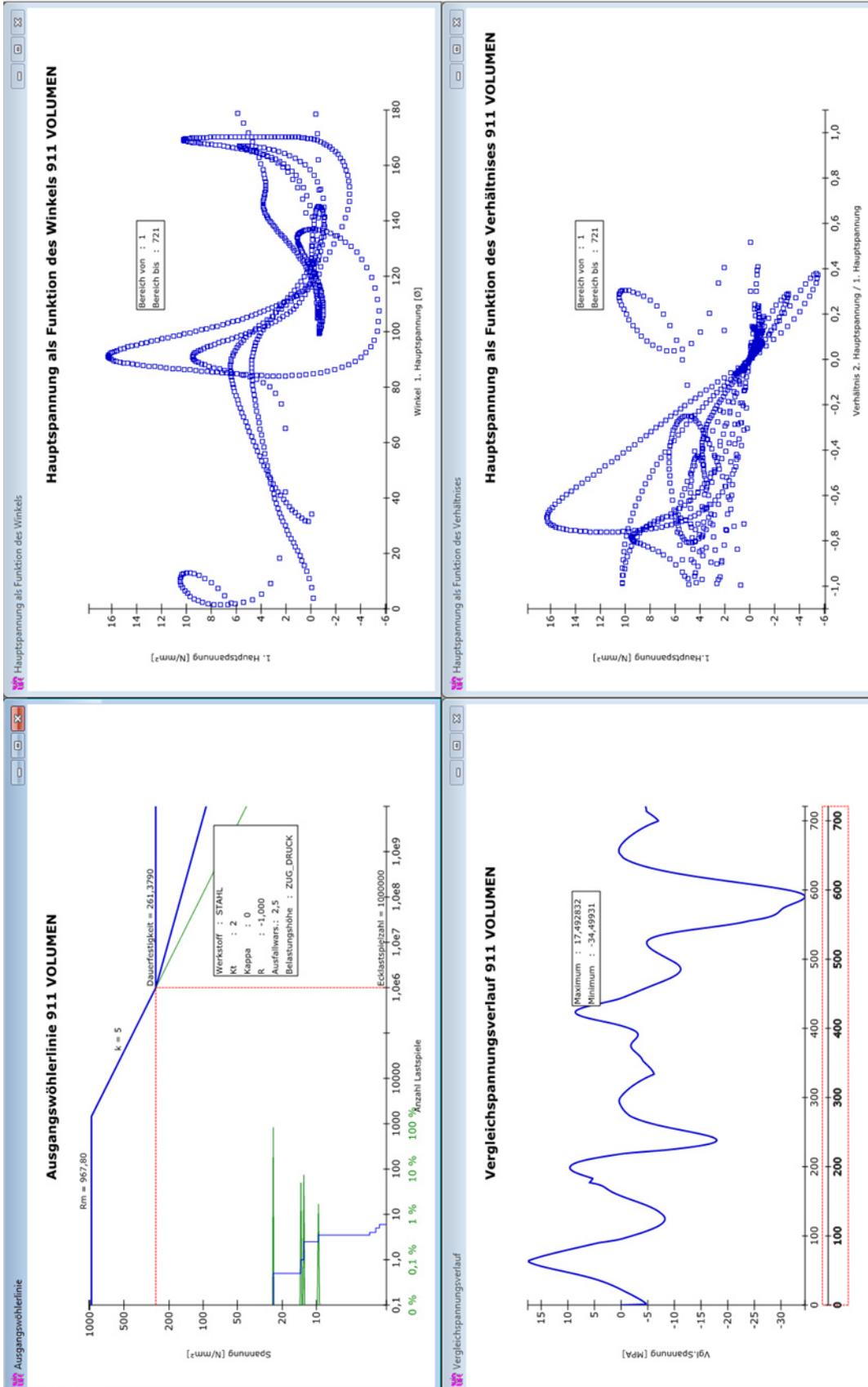


Abbildung A2 / 1: winLIFE Ergebnisse - N911 - FFlex_e_d1

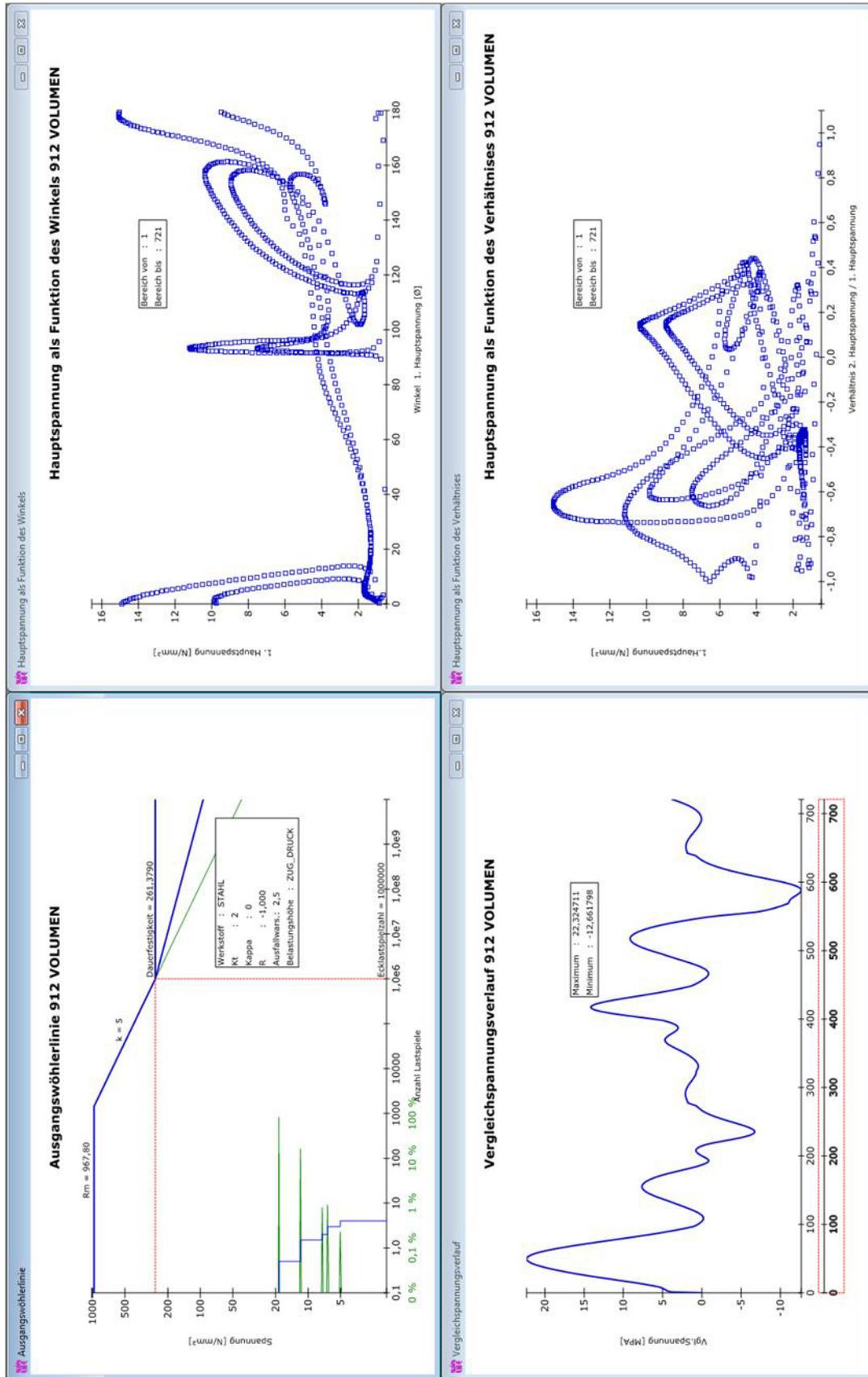


Abbildung A2 / 2: winLIFE Ergebnisse - N912 - FFlex_e_d1

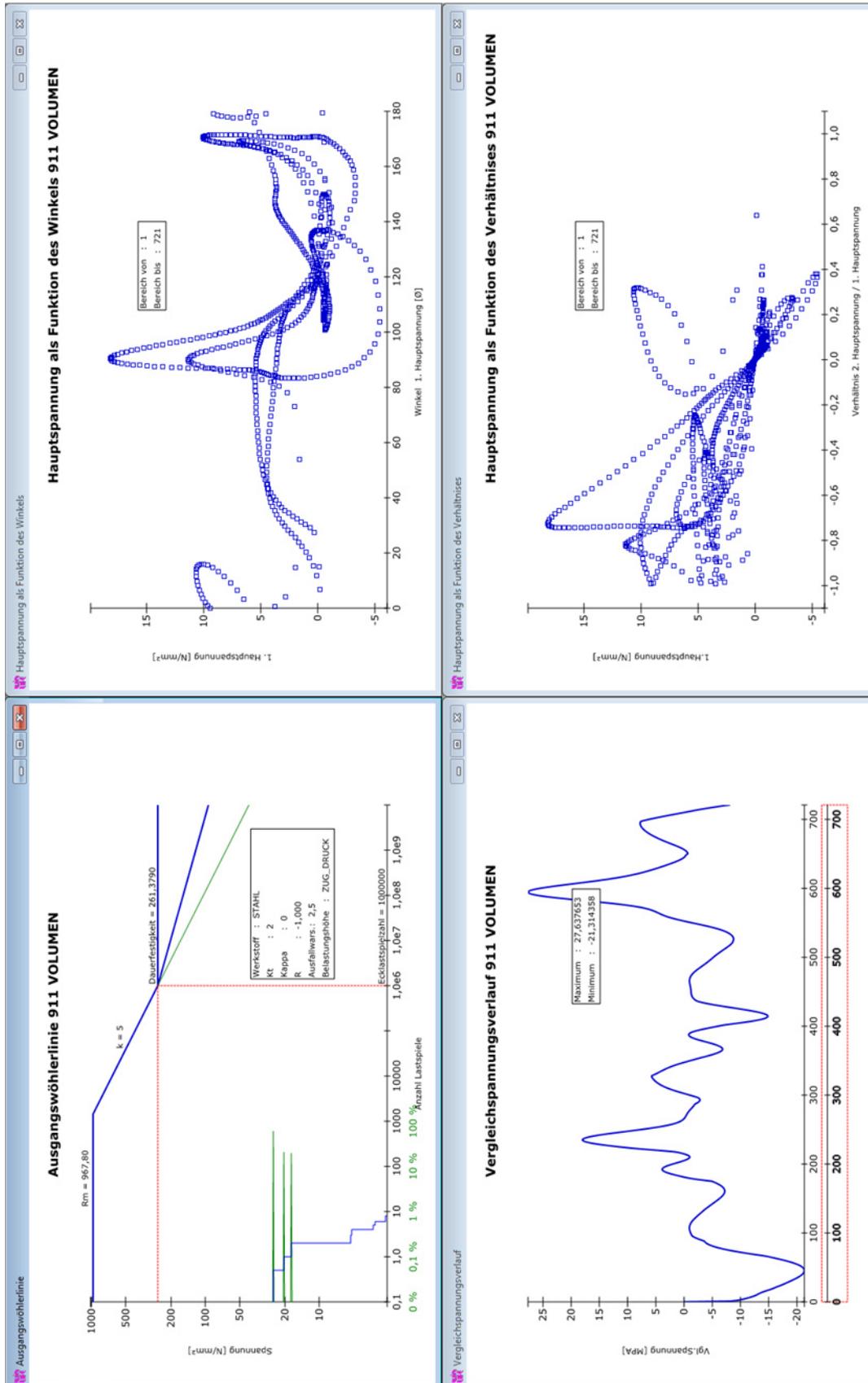


Abbildung A2 / 3: winLIFE Ergebnisse - N911 - FFlex_e_d2

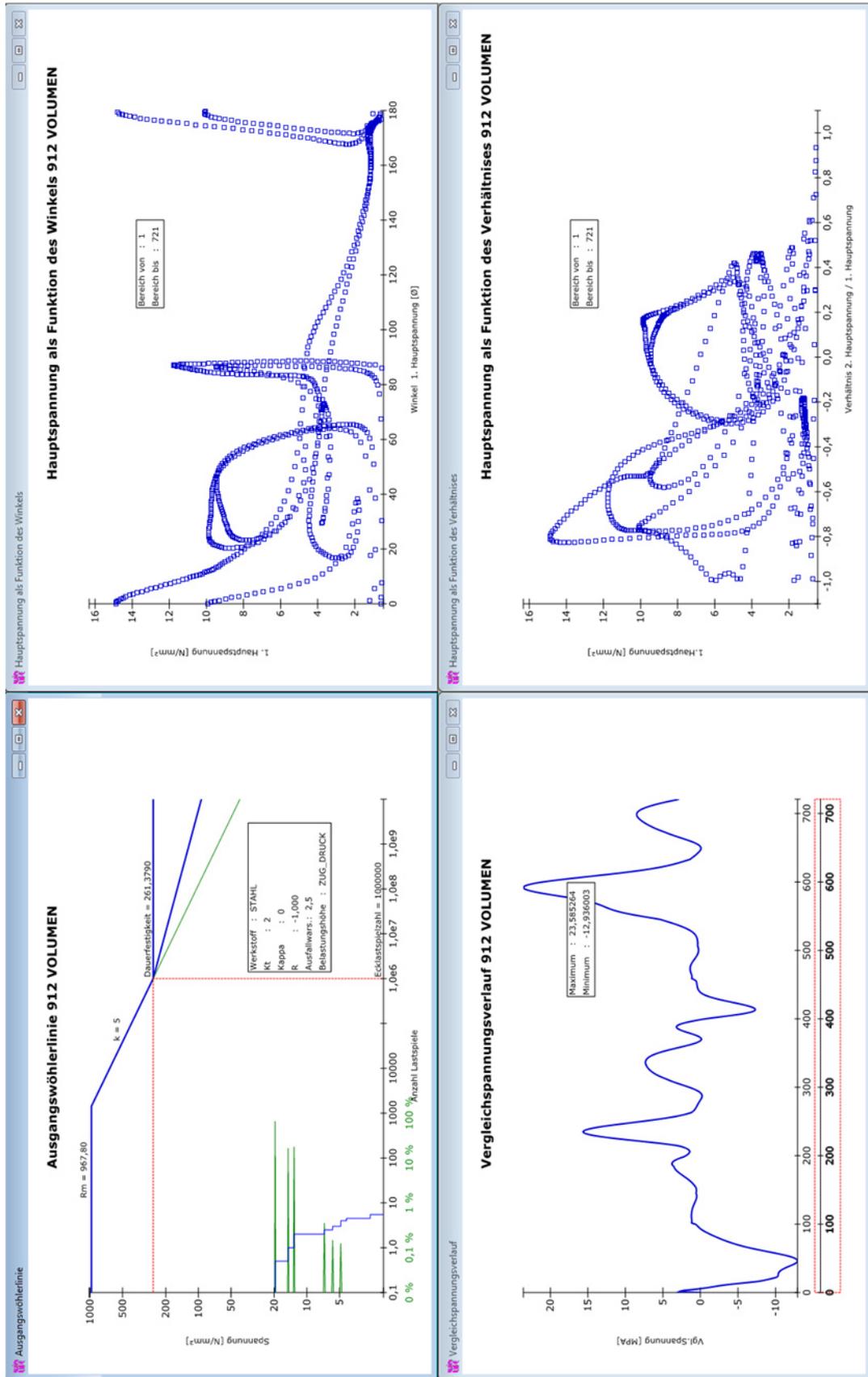


Abbildung A2 / 4: winLIFE Ergebnisse - N912 - FFlex_e_d2

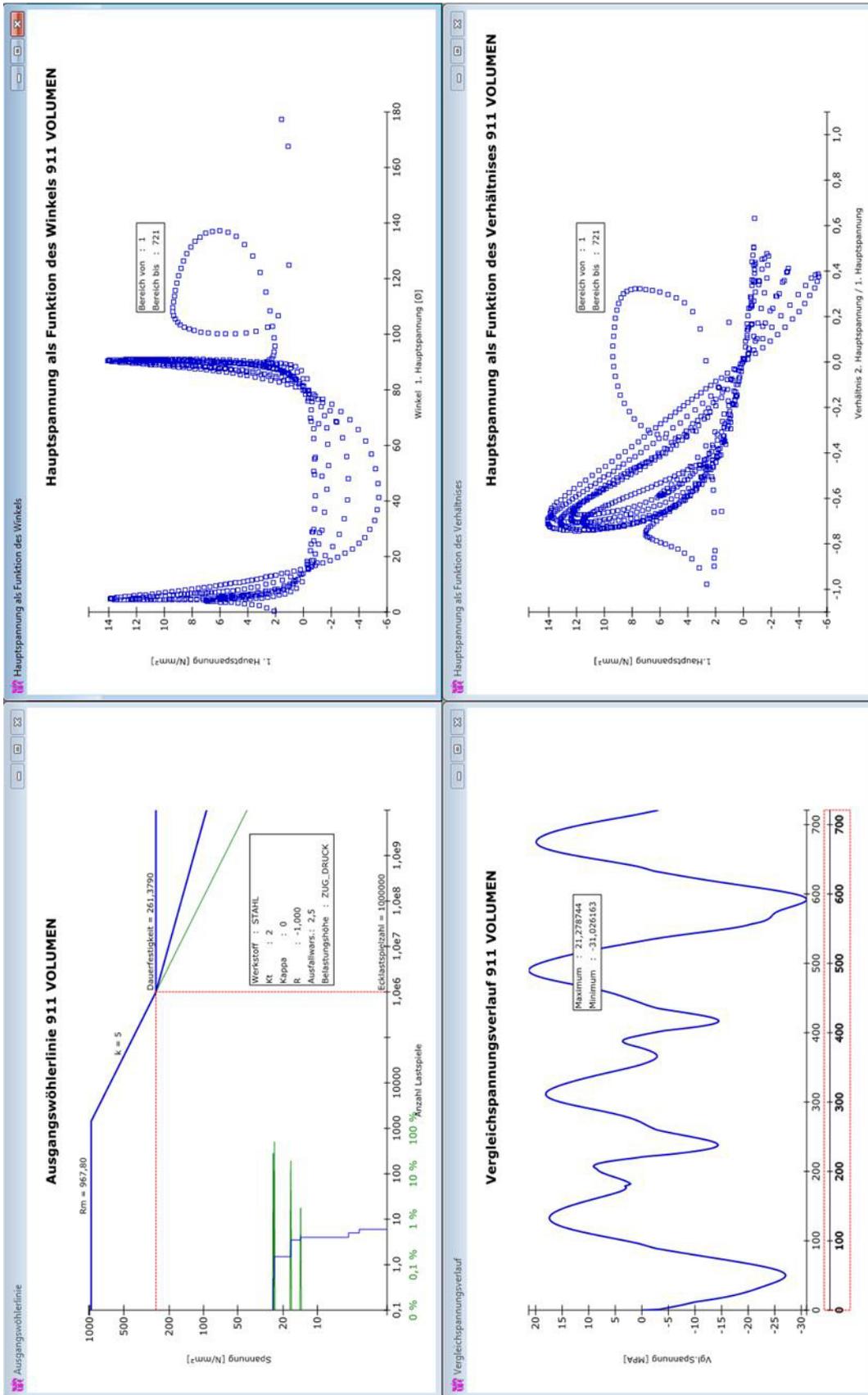


Abbildung A2 / 5: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10_d1

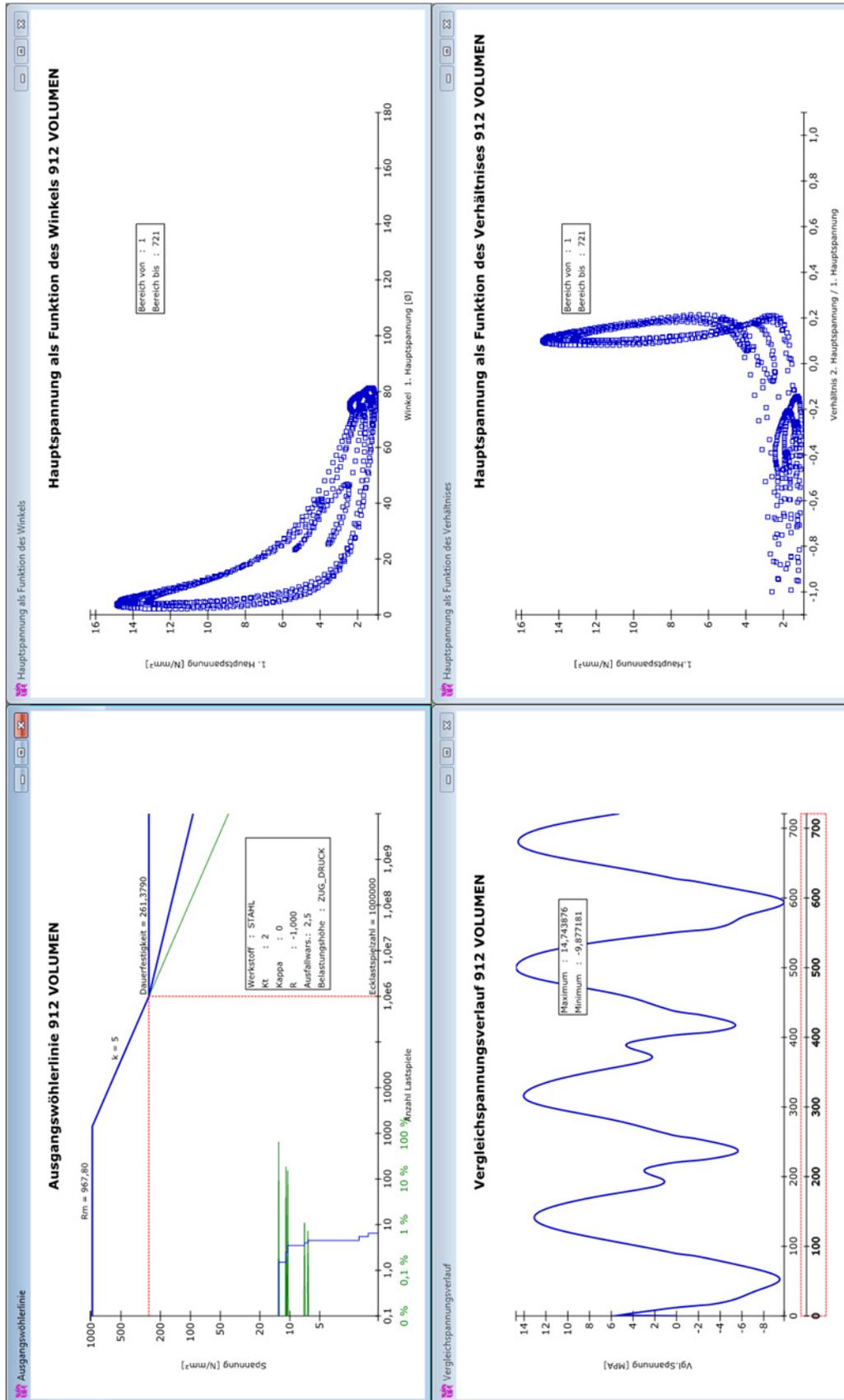


Abbildung A2 / 6: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10_d1

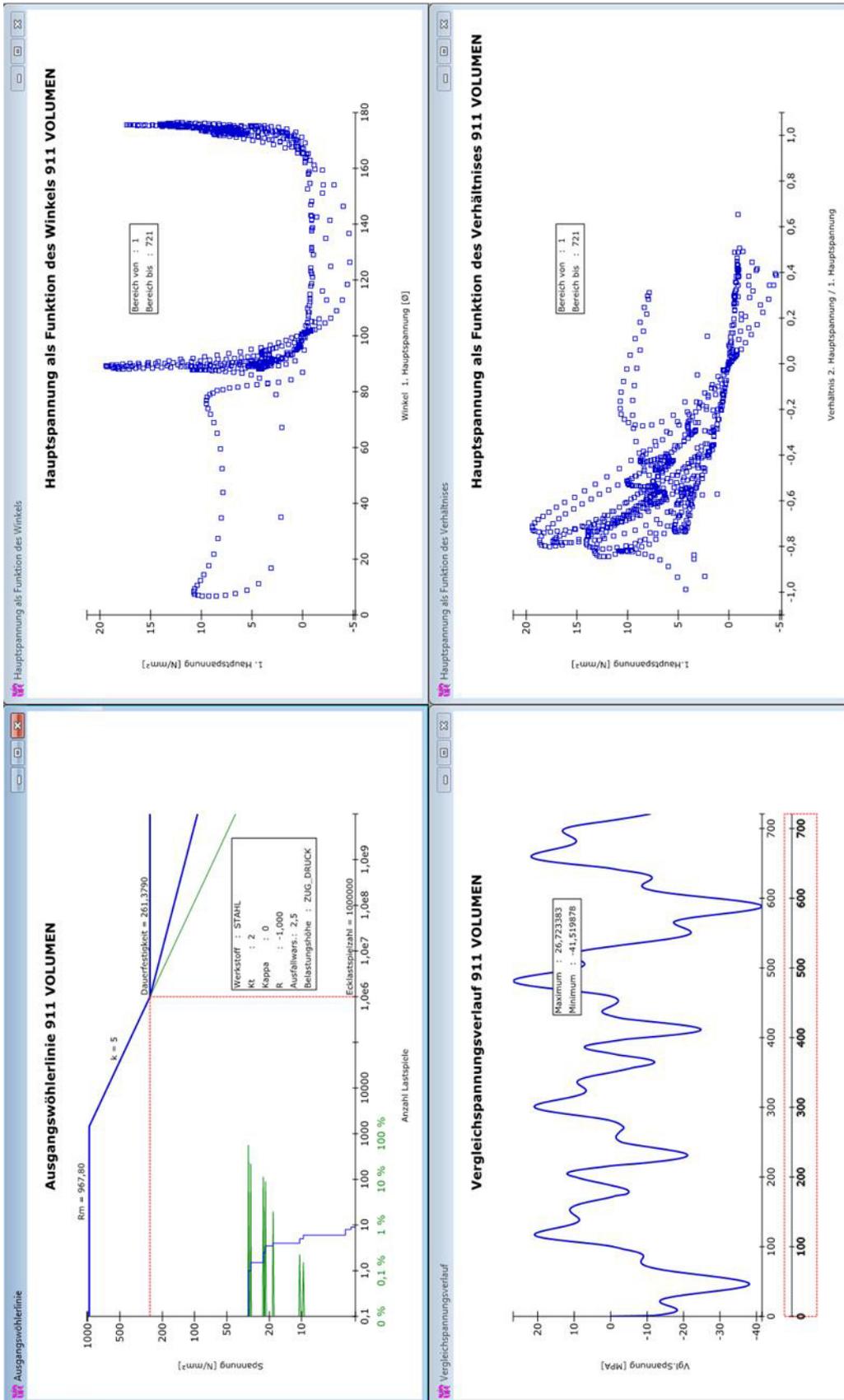


Abbildung A2 / 7: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10_d2

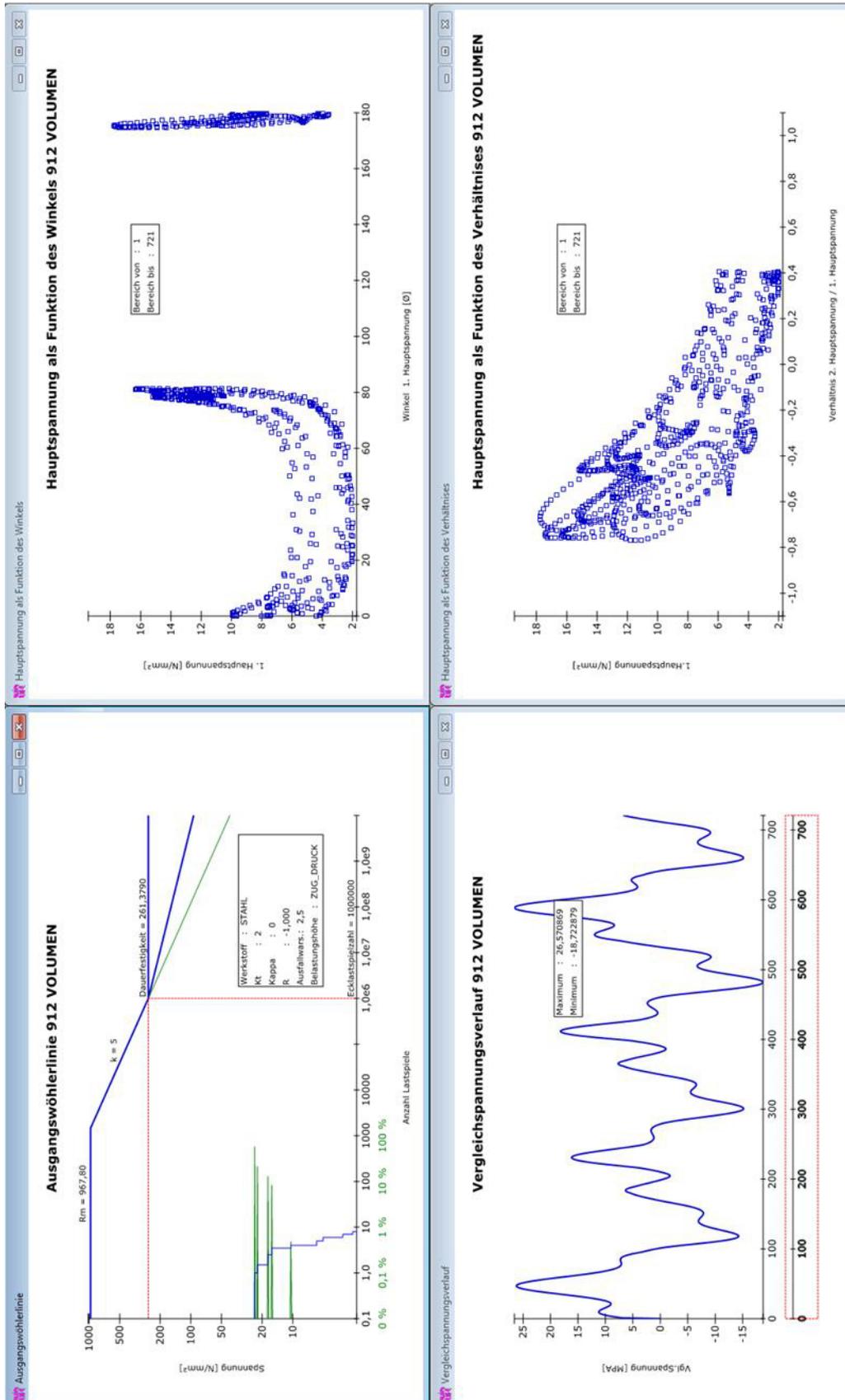


Abbildung A2 / 8: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10_d2

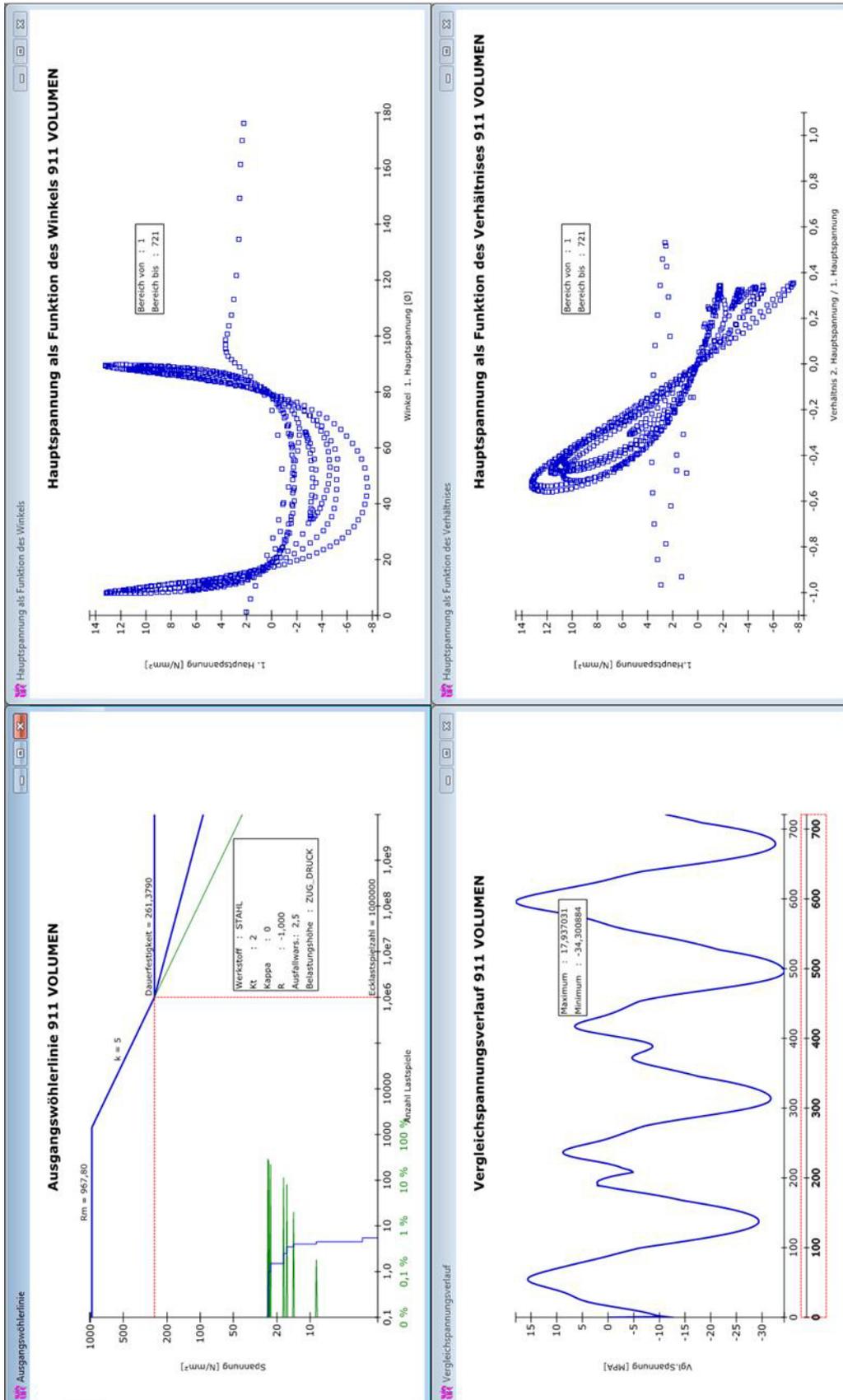


Abbildung A2 / 9: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10r1_d1

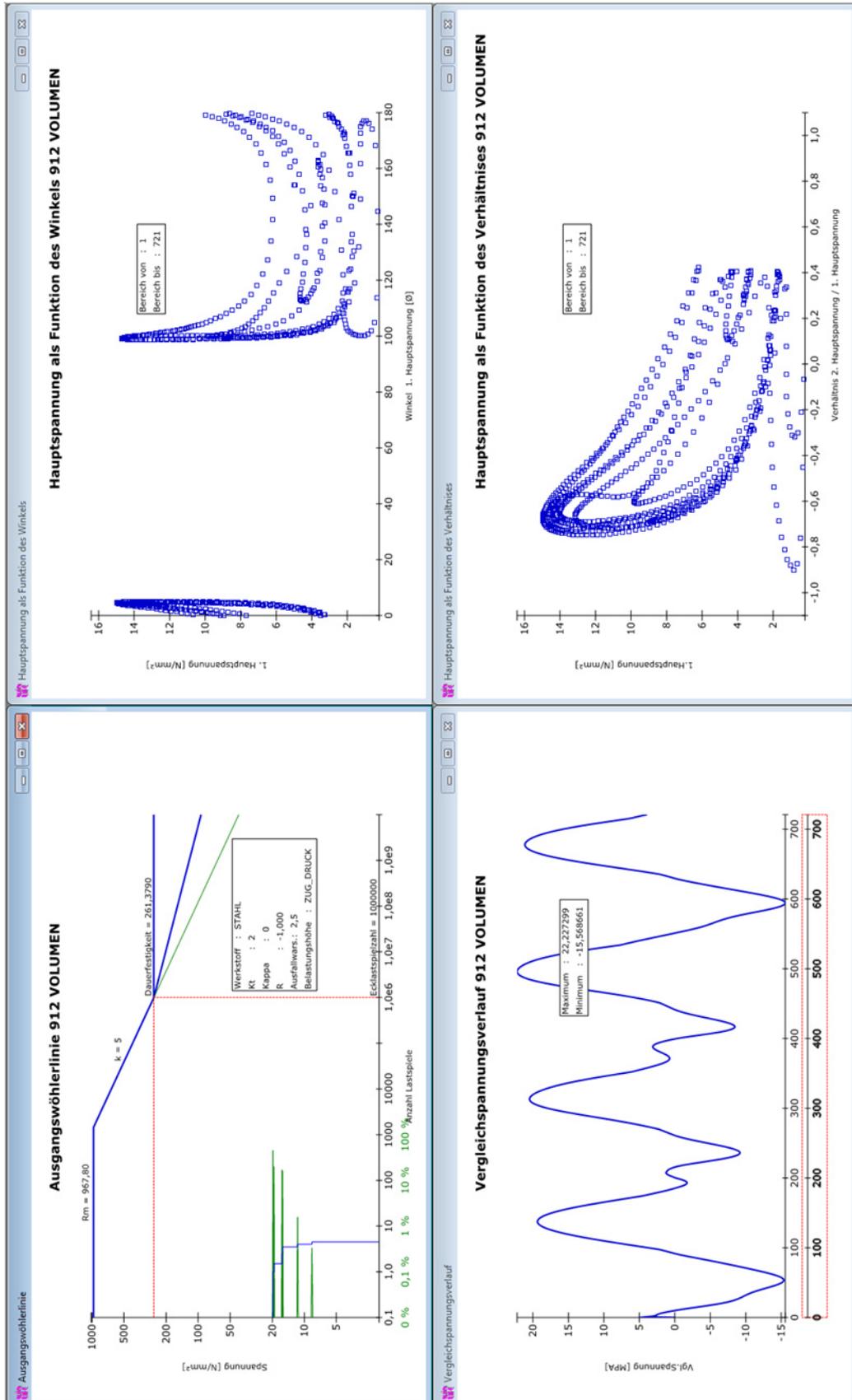


Abbildung A2 / 10: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10r1_d1

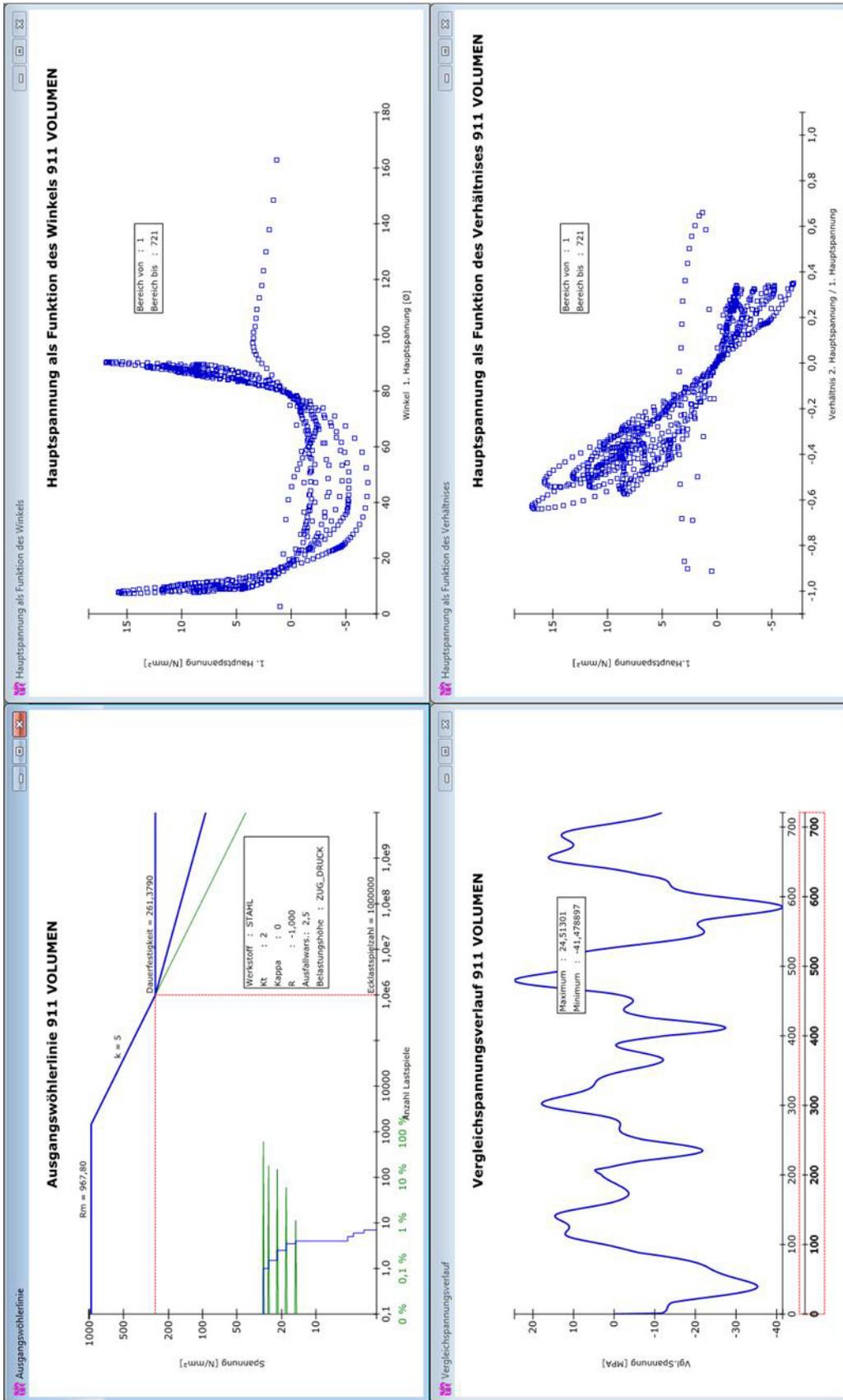


Abbildung A2 / 11: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10r1_d2

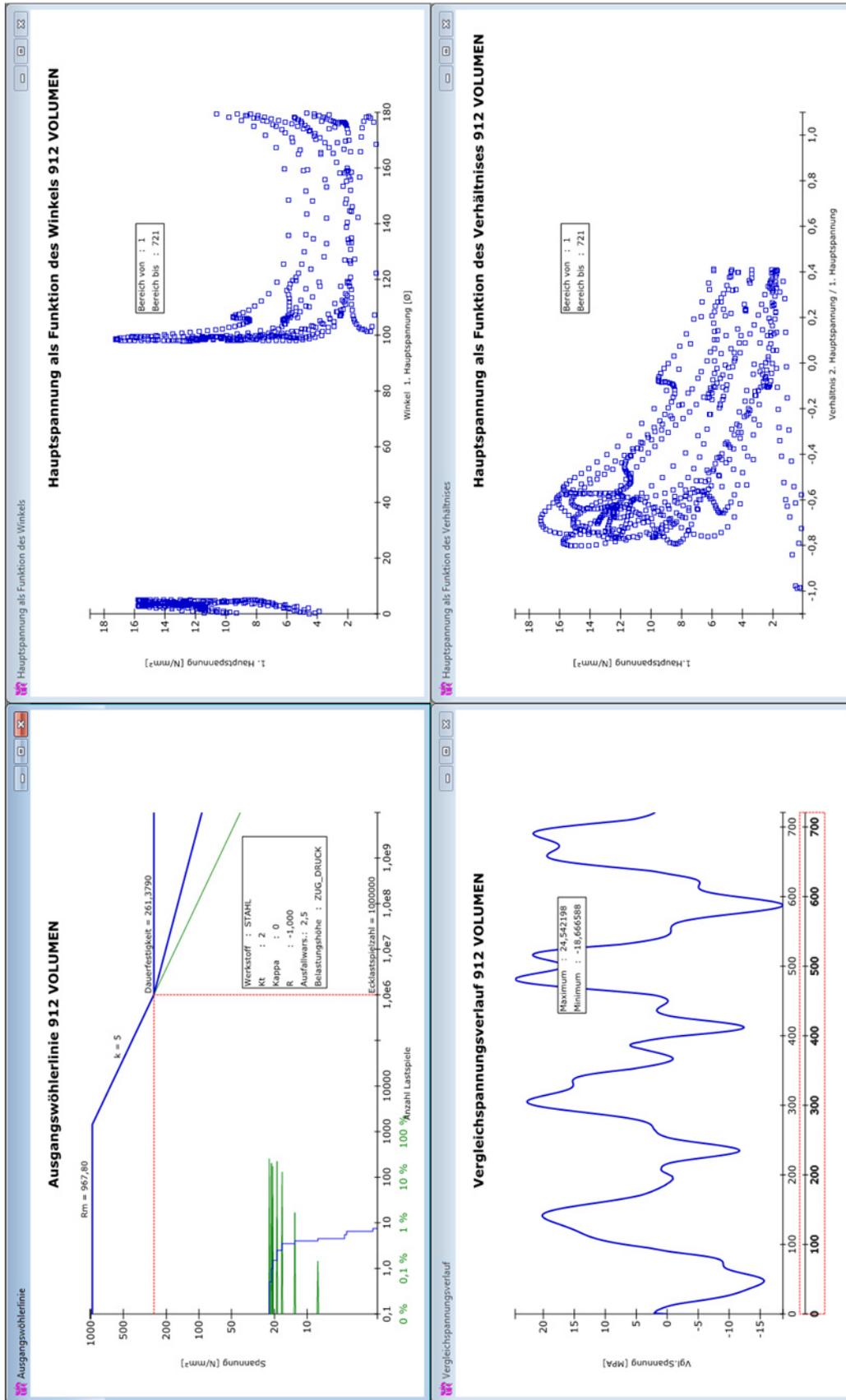


Abbildung A2 / 12: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10r1_d2

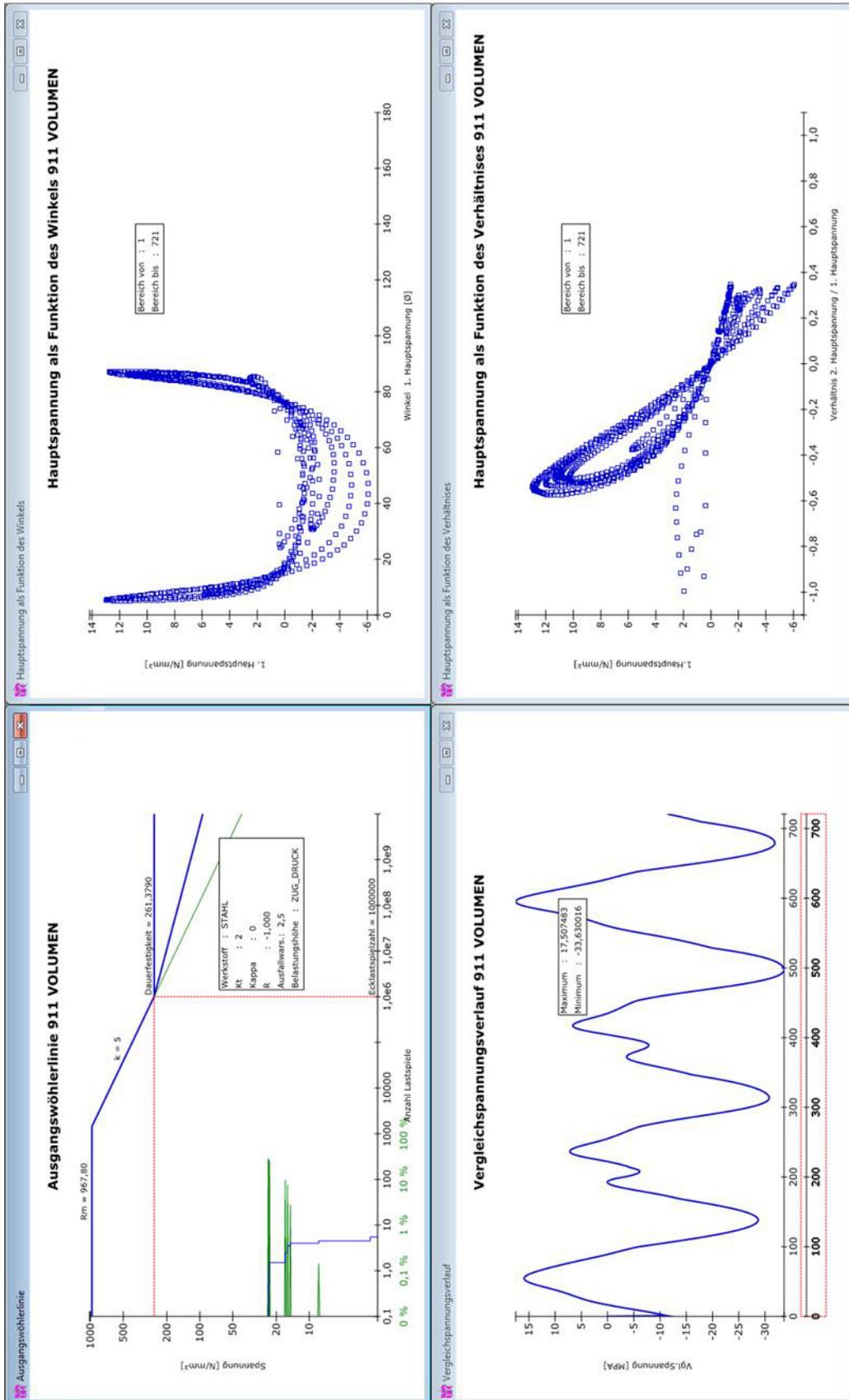


Abbildung A2 / 13: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10r2_d1

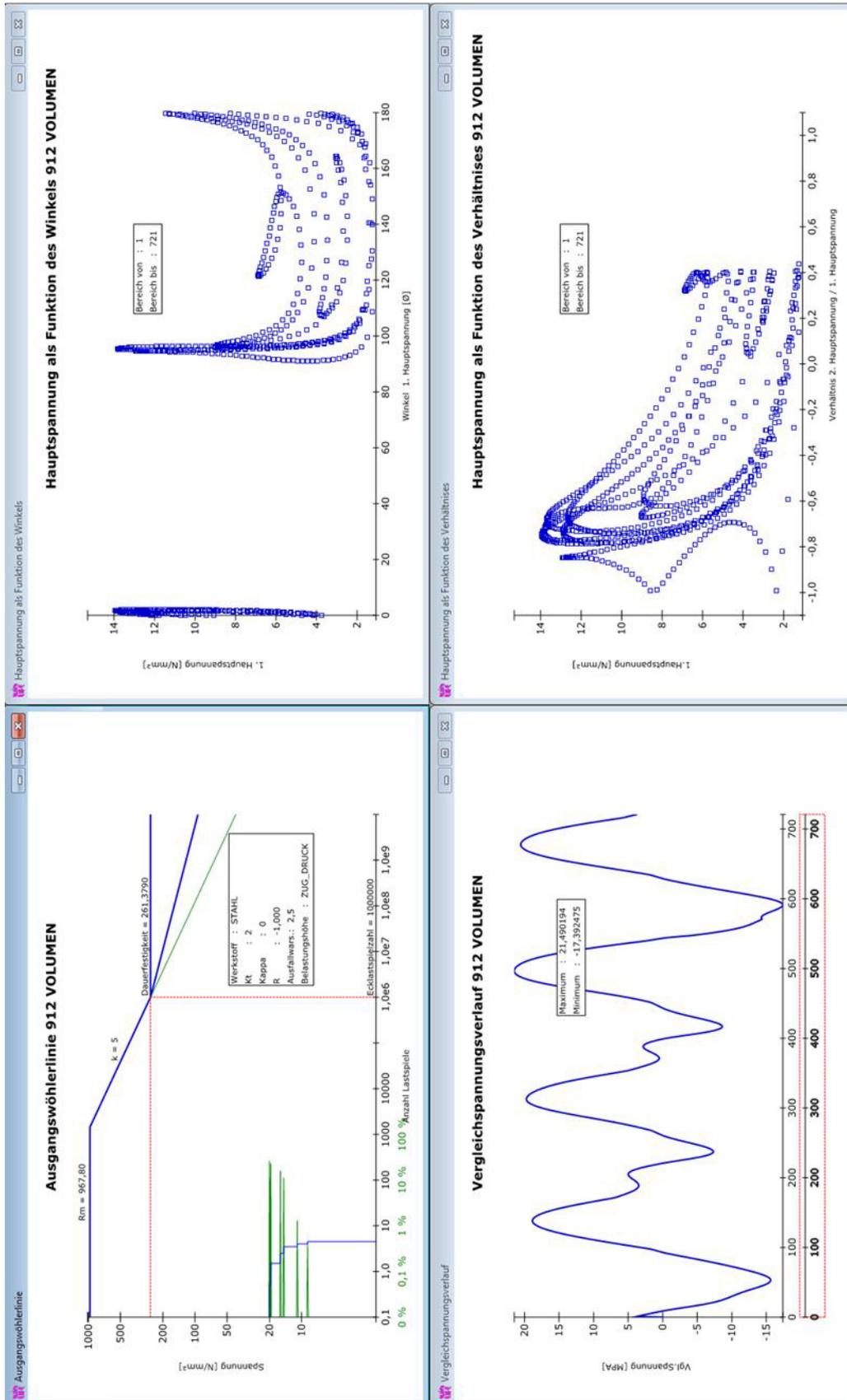


Abbildung A2 / 14: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10r2_d2

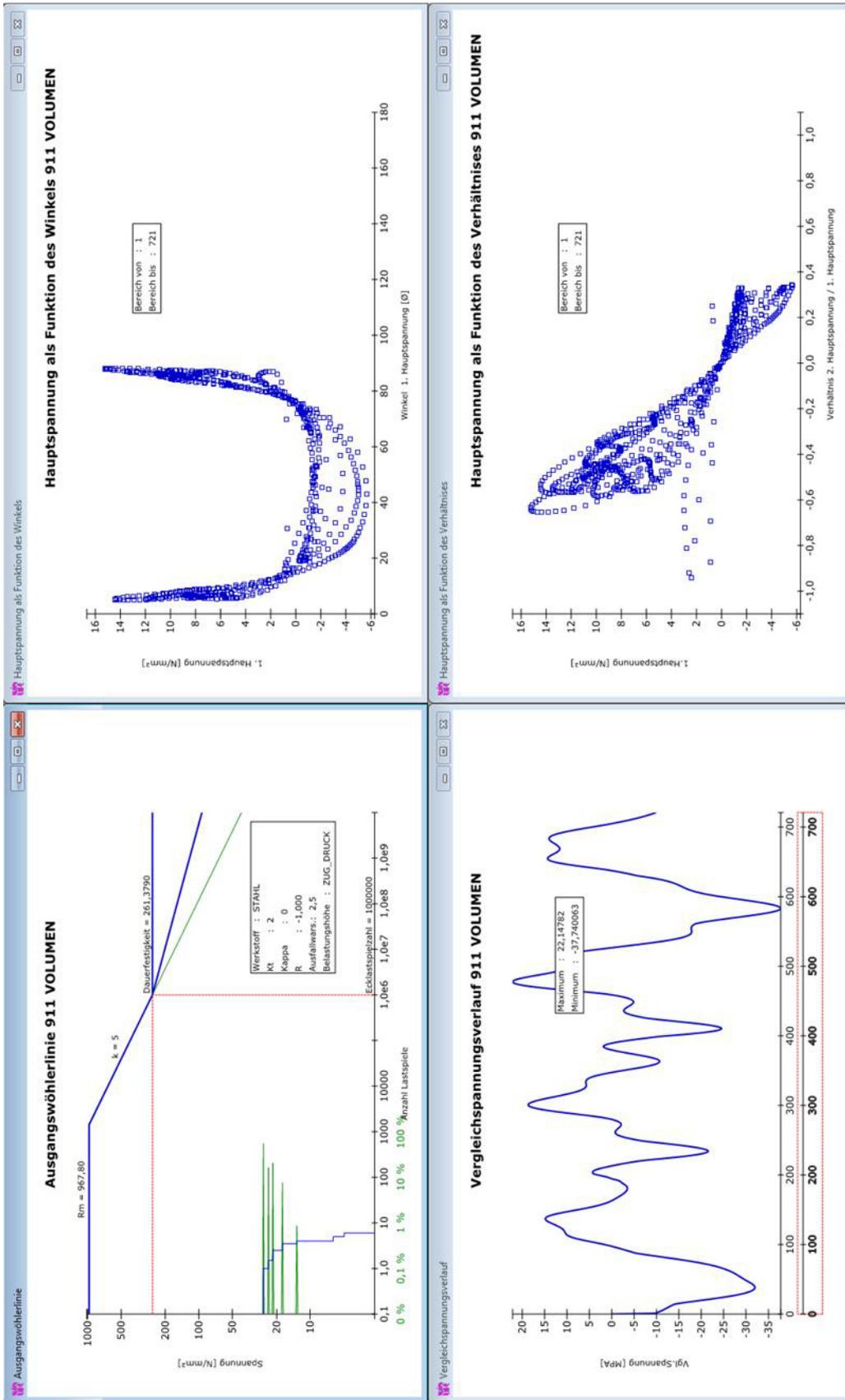


Abbildung A2 / 15: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e10r2_d2

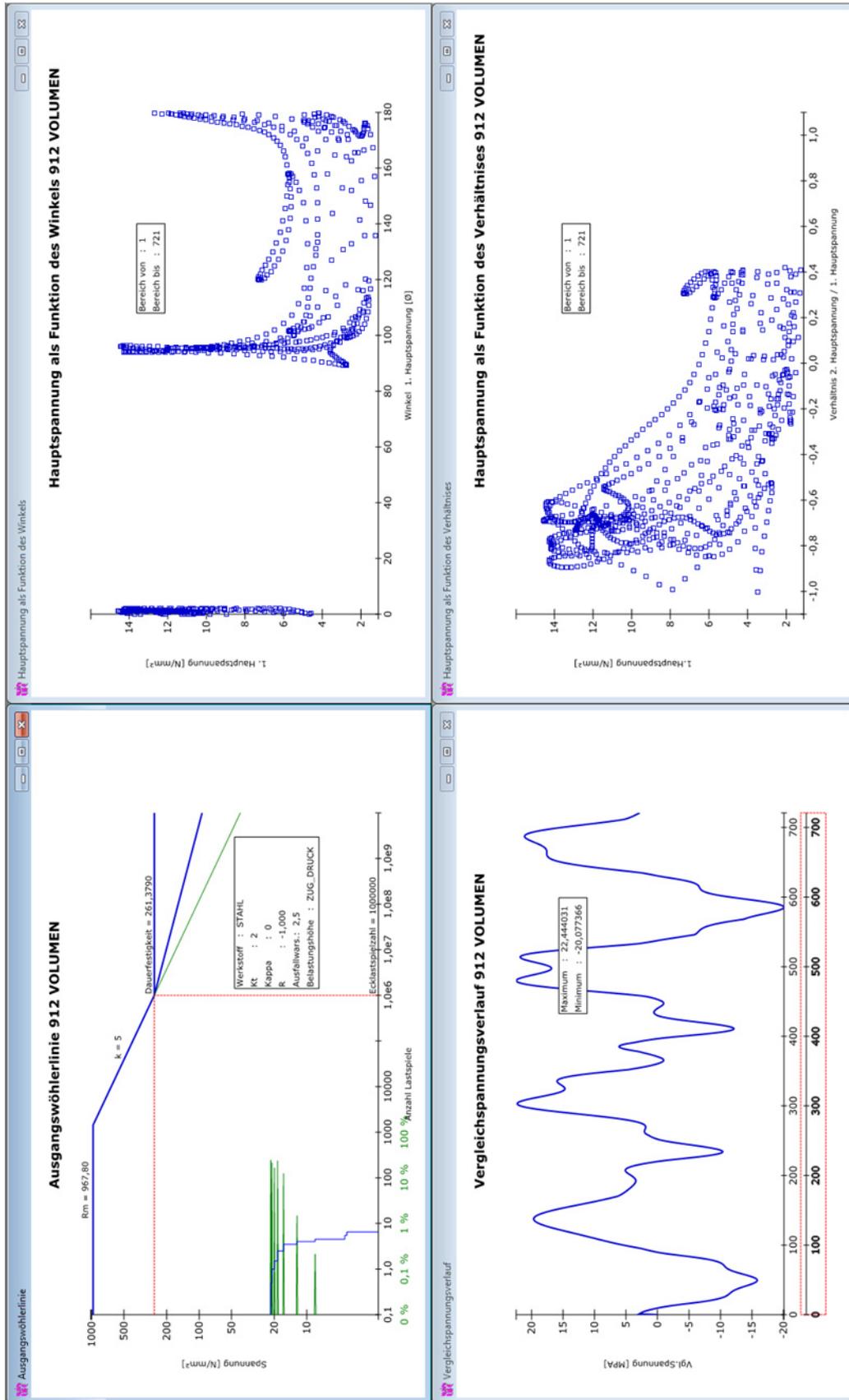


Abbildung A2 / 16: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e10r2_d2

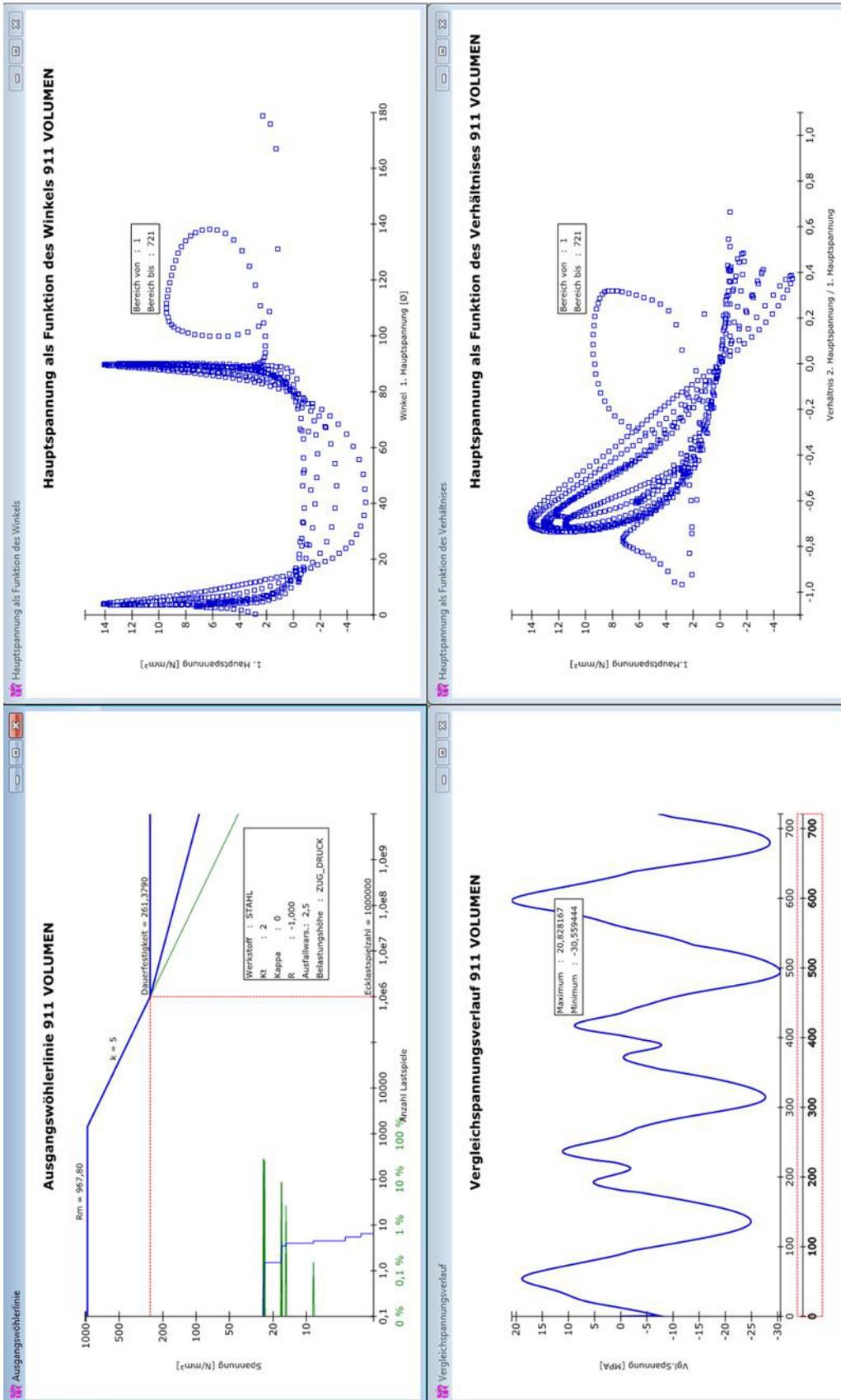


Abbildung A2 / 17: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e20_d1

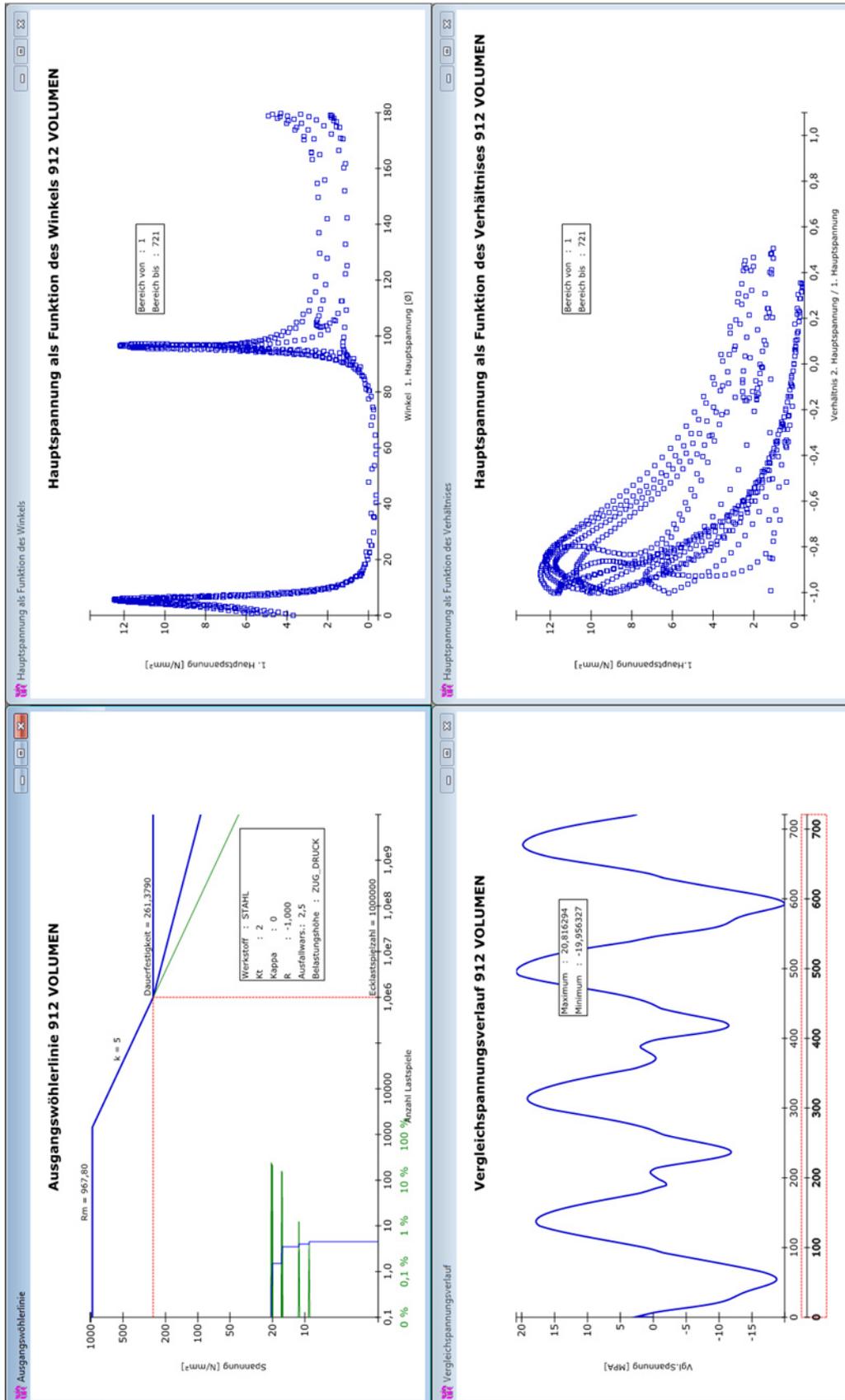


Abbildung A2 / 18: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e20_d1

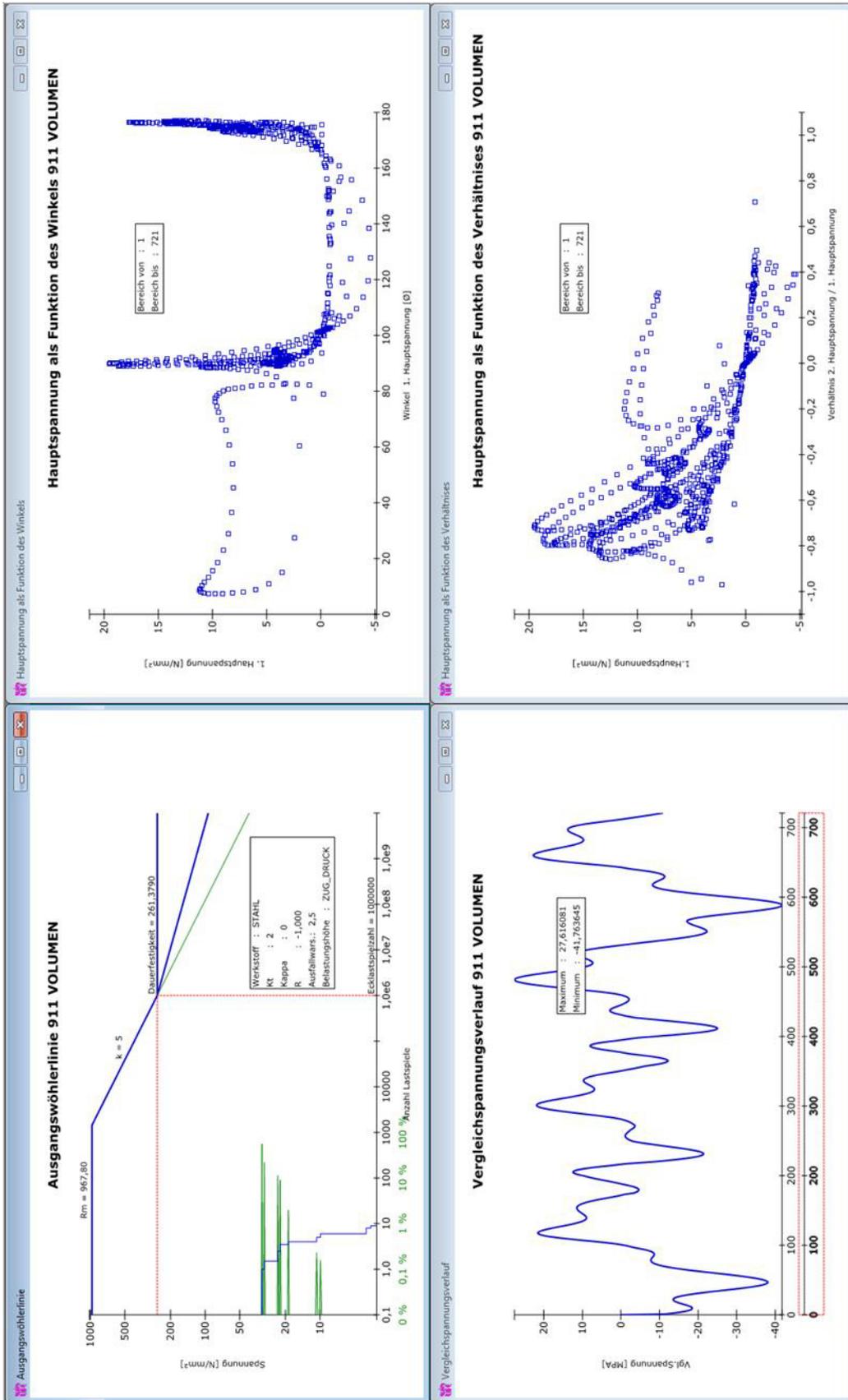


Abbildung A2 / 19: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFLex_e20_d2

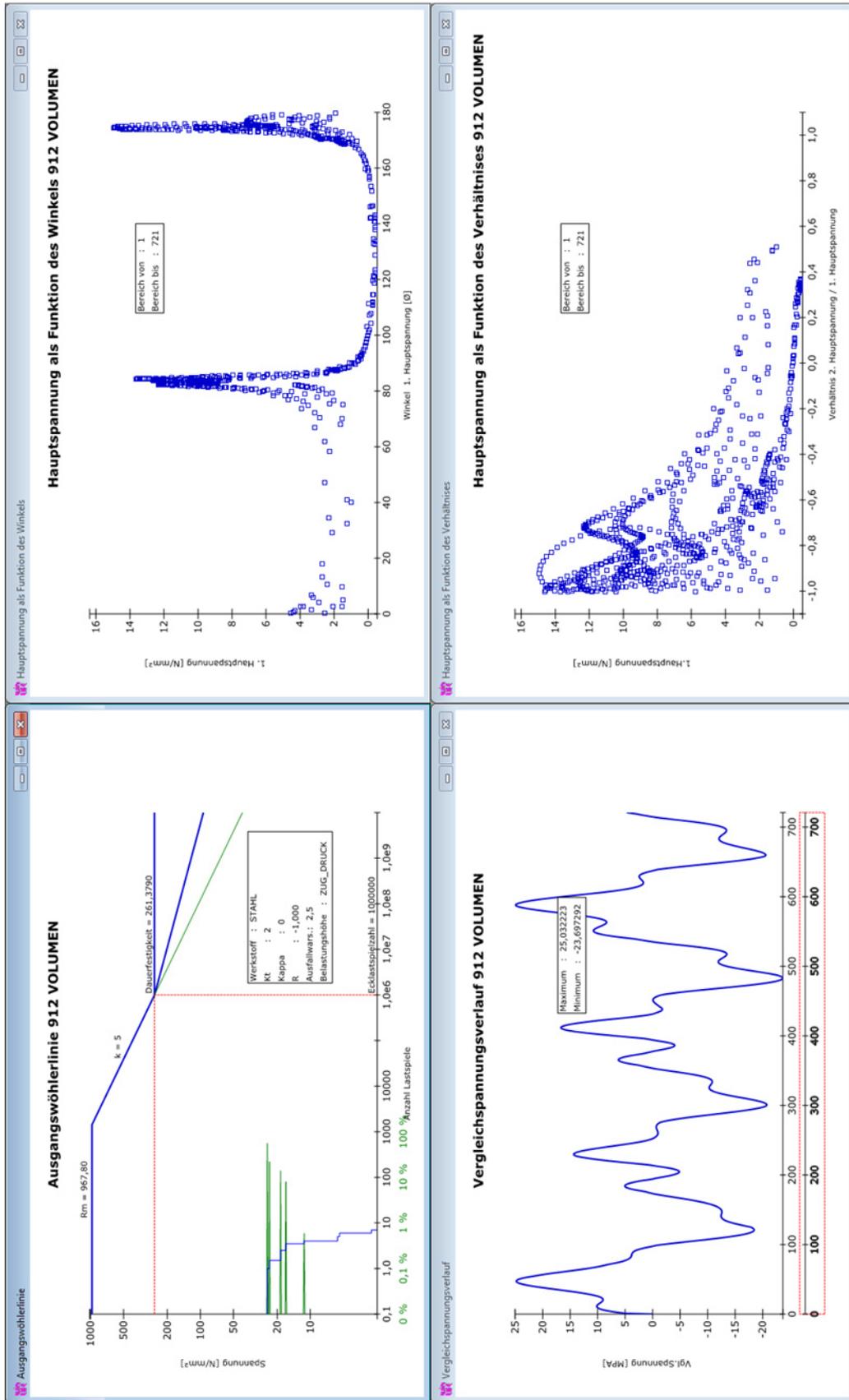


Abbildung A2 / 20: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlEx_e20_d2

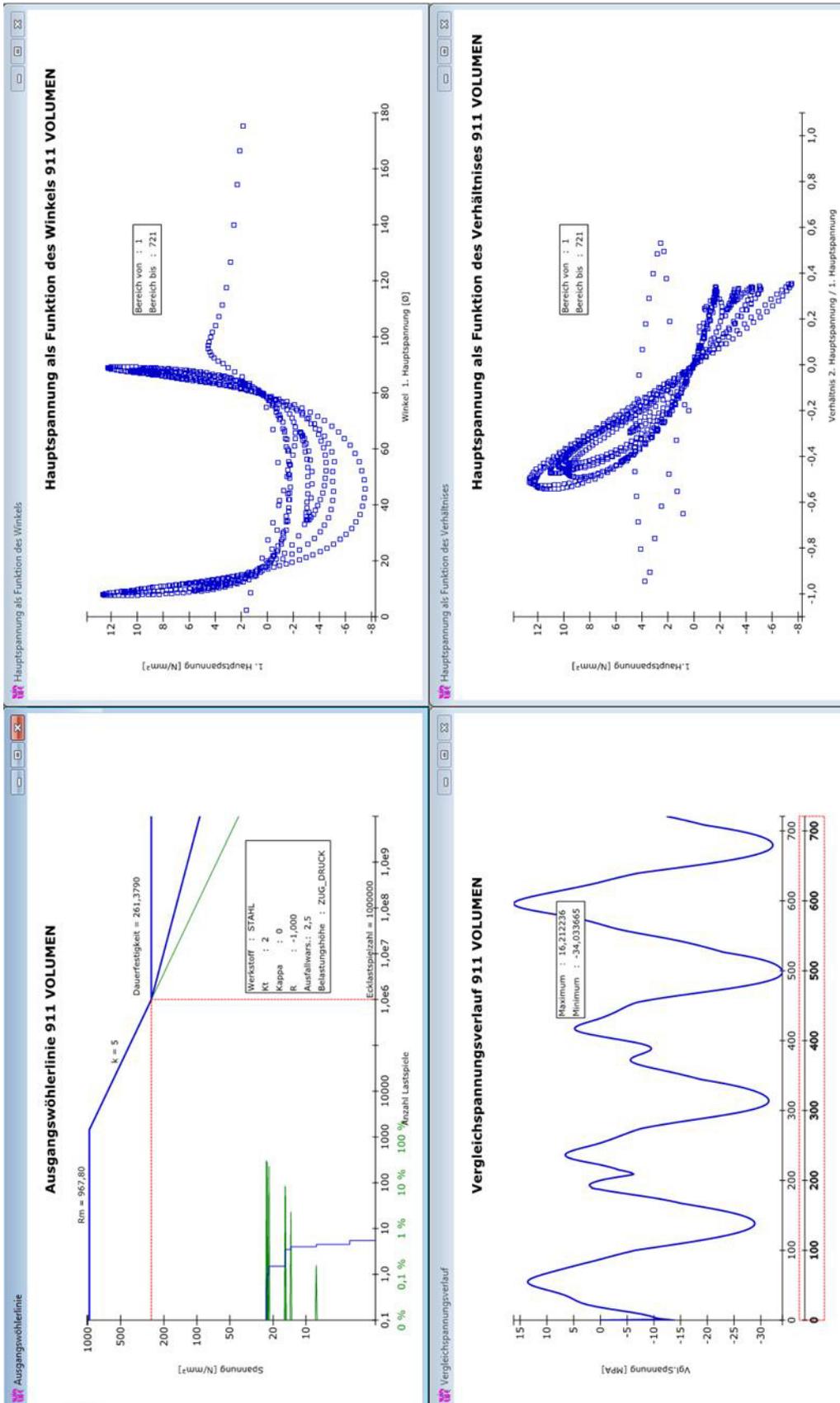


Abbildung A2 / 21: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e20r1_d1

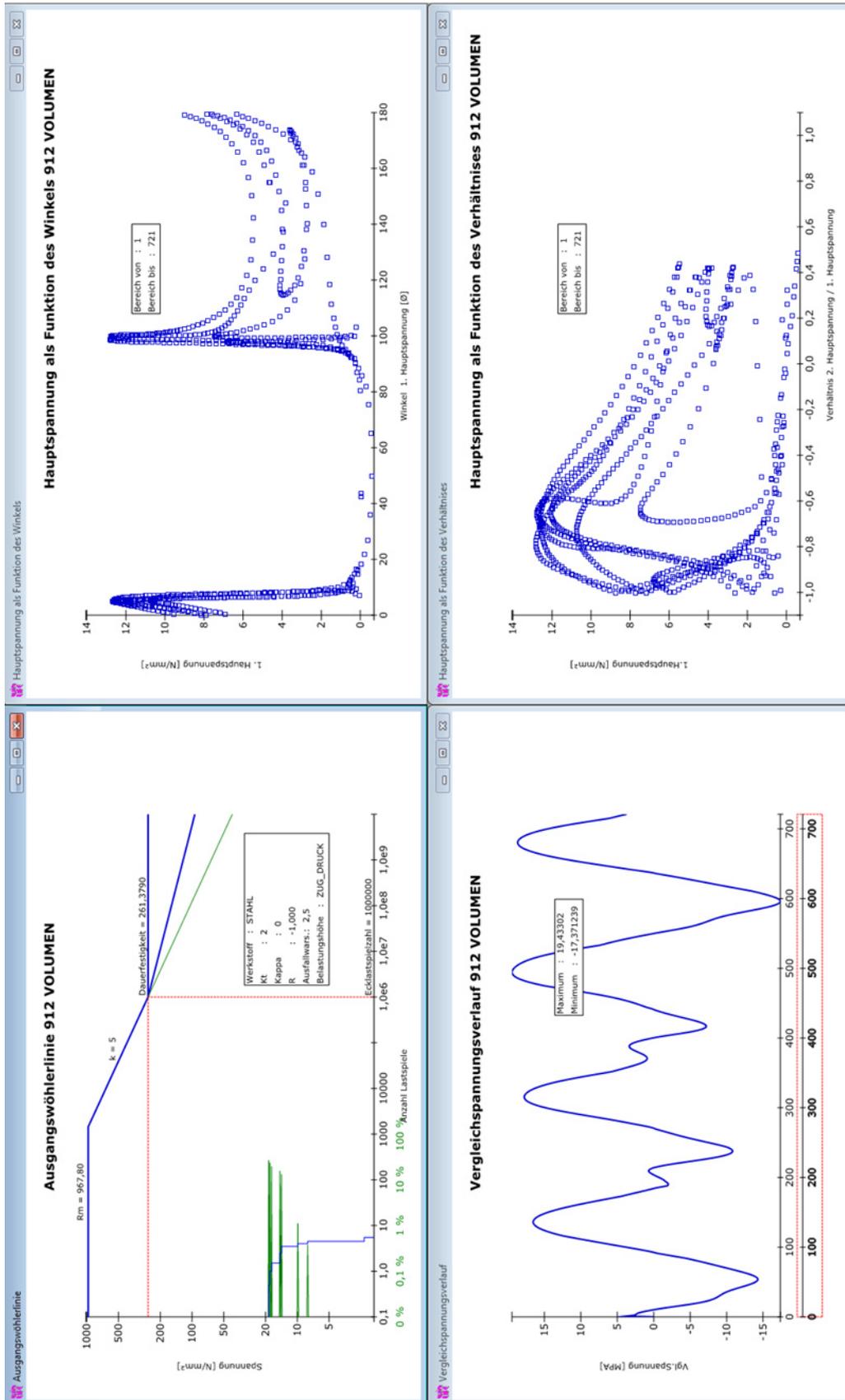


Abbildung A2 / 22: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e20r1_d1

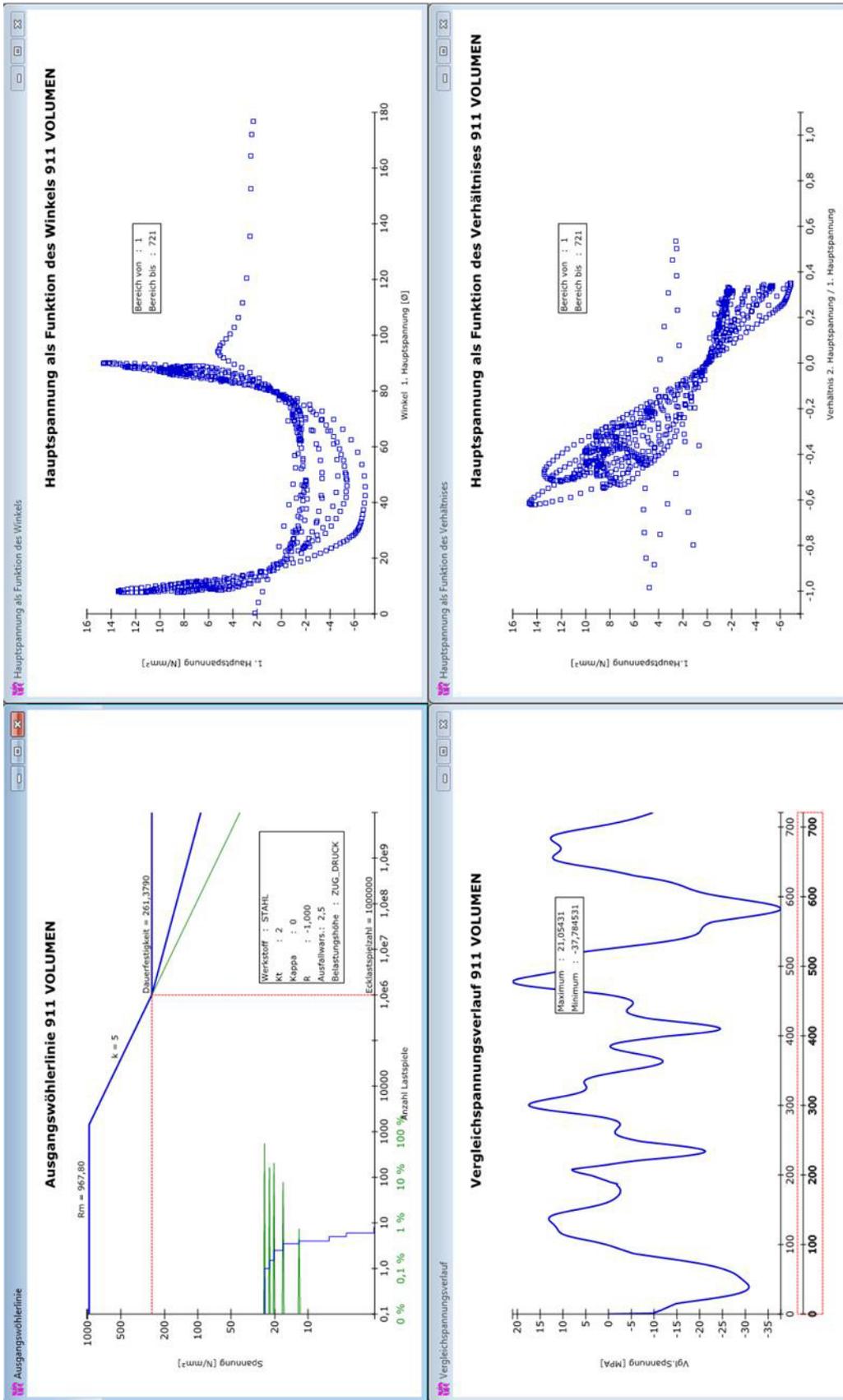


Abbildung A2 / 23: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e20r1_d2

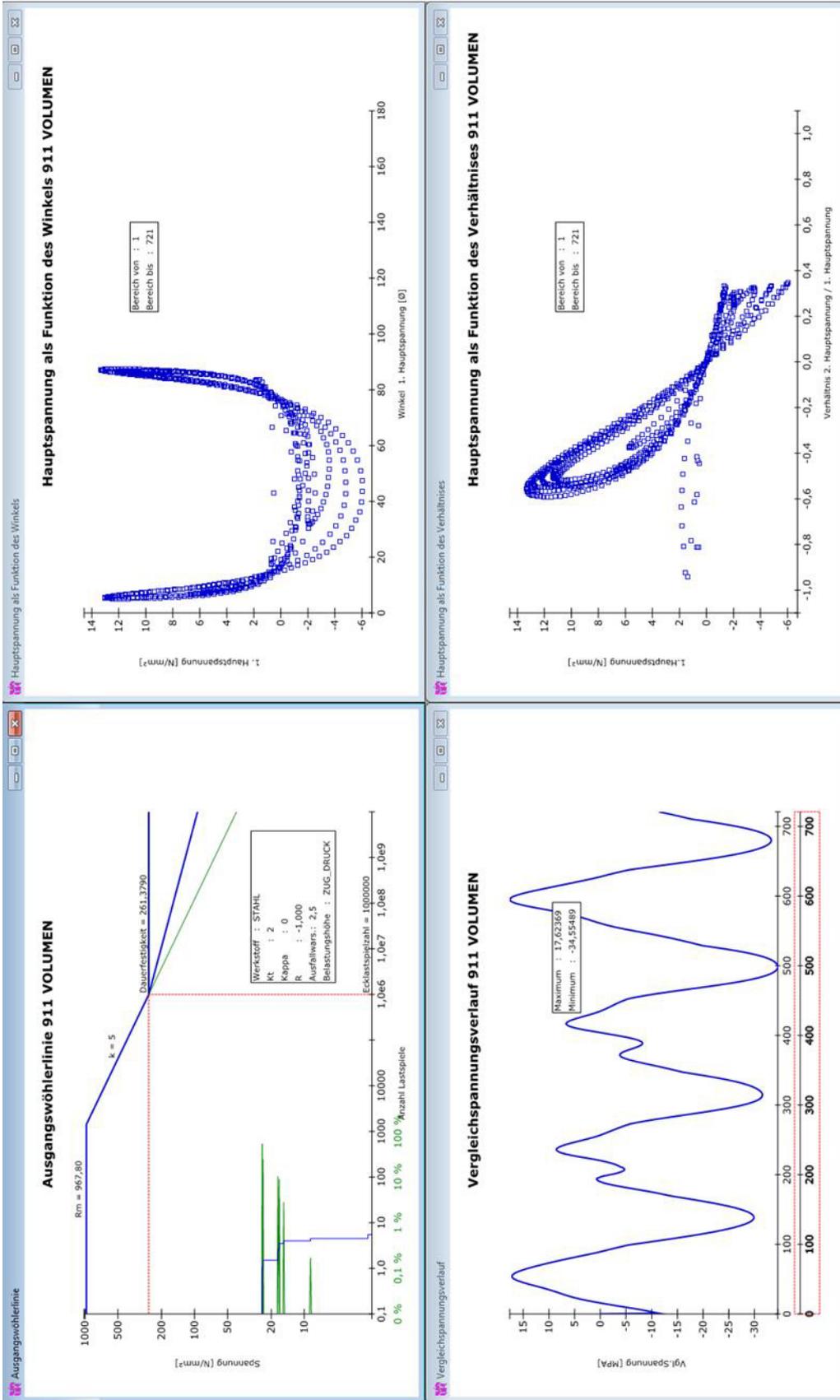


Abbildung A2 / 25: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e20r2_d1

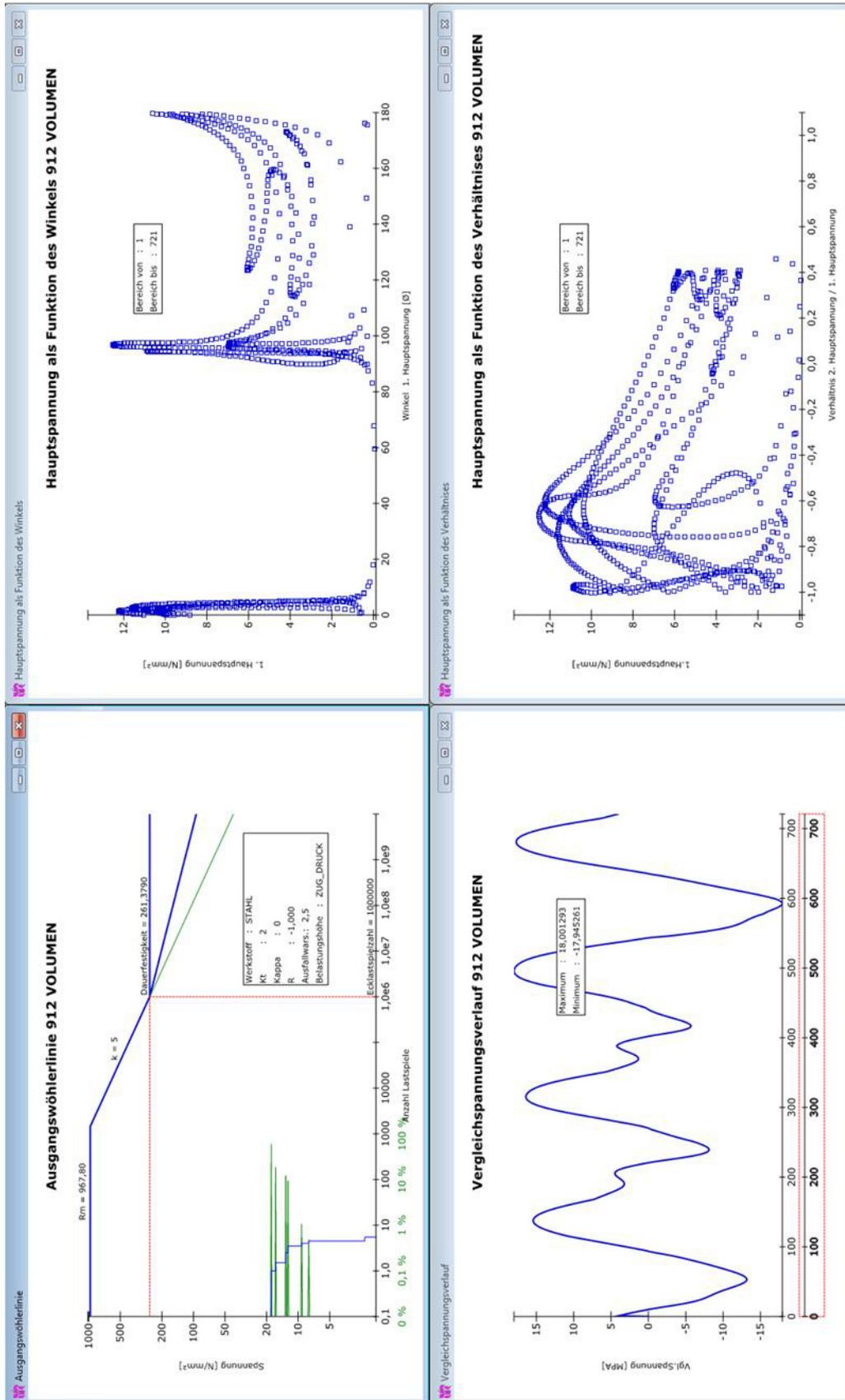


Abbildung A2 / 26: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e20r2_d1

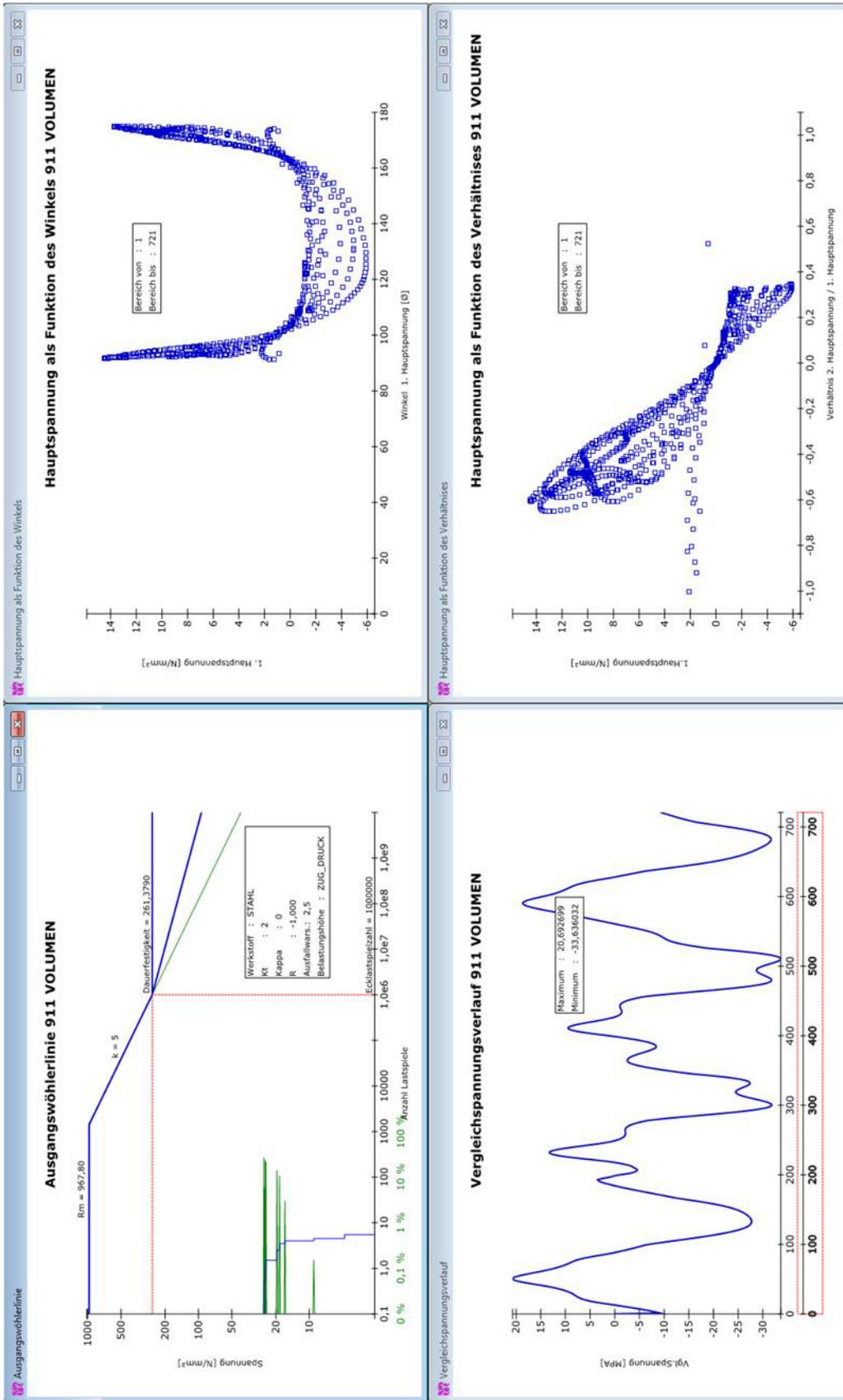


Abbildung A2 / 27: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFLex_e20r2_d2

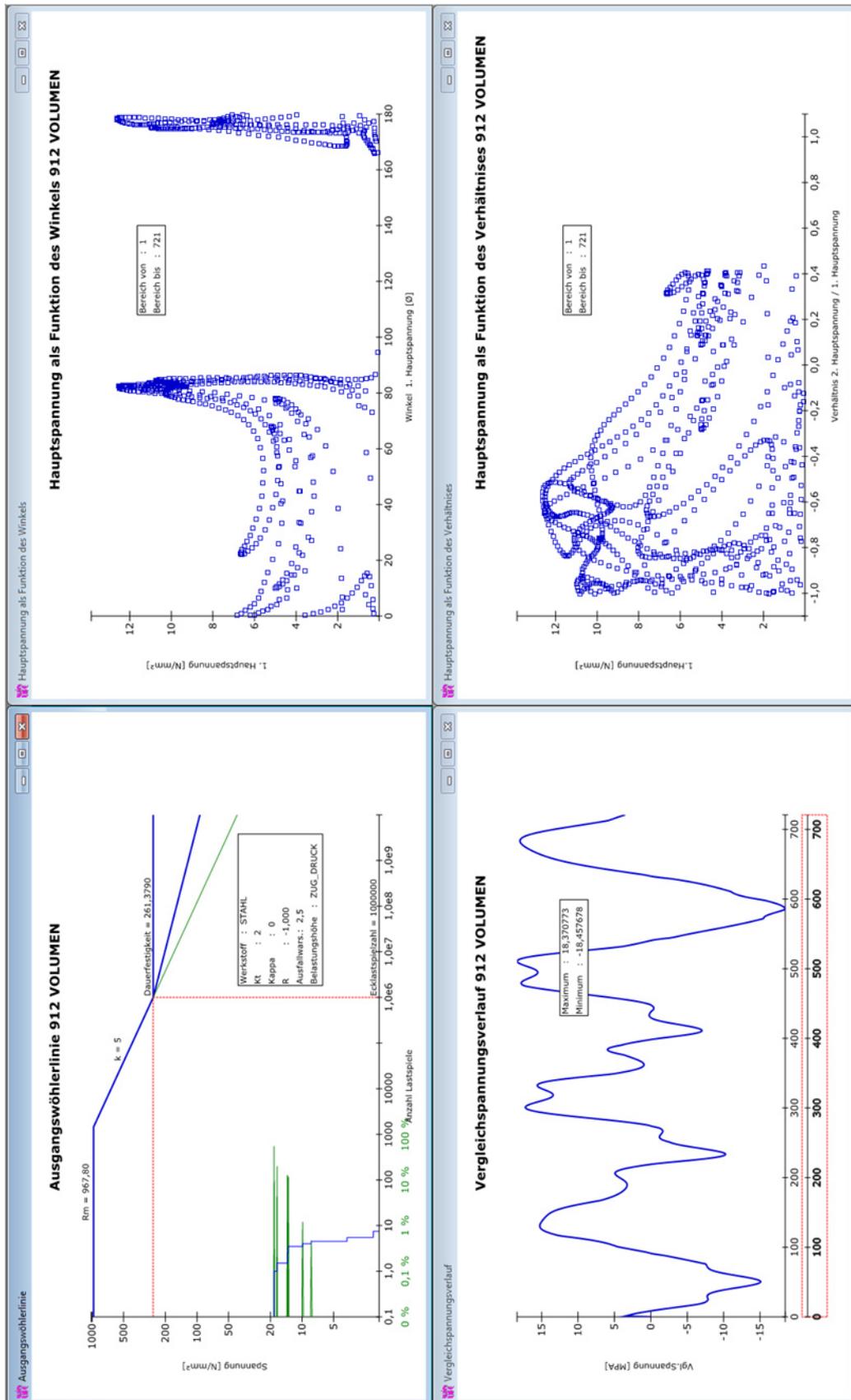


Abbildung A2 / 28: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e20r2_d2

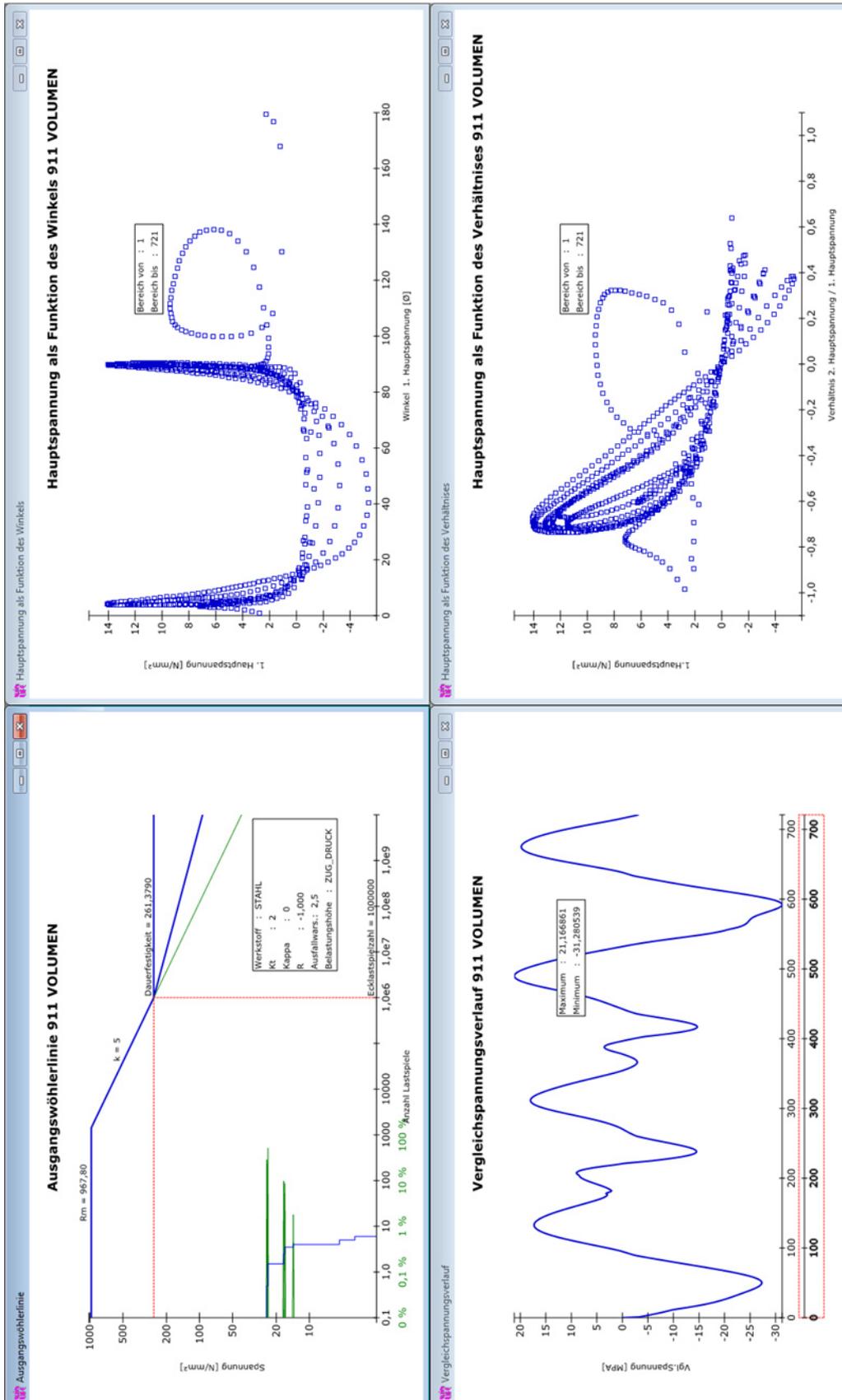


Abbildung A2 / 29: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e30_d1

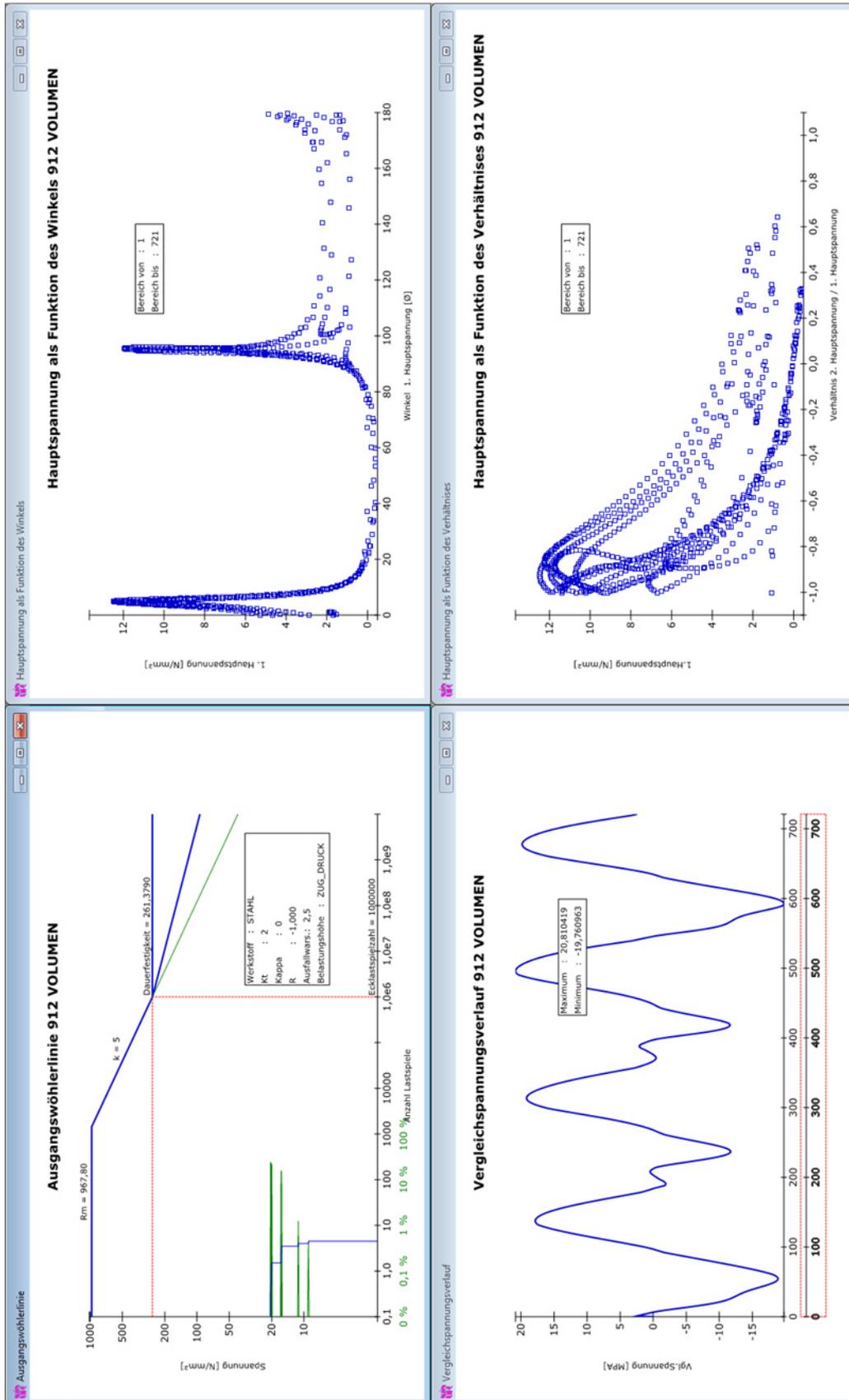


Abbildung A2 / 30: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e30_d1

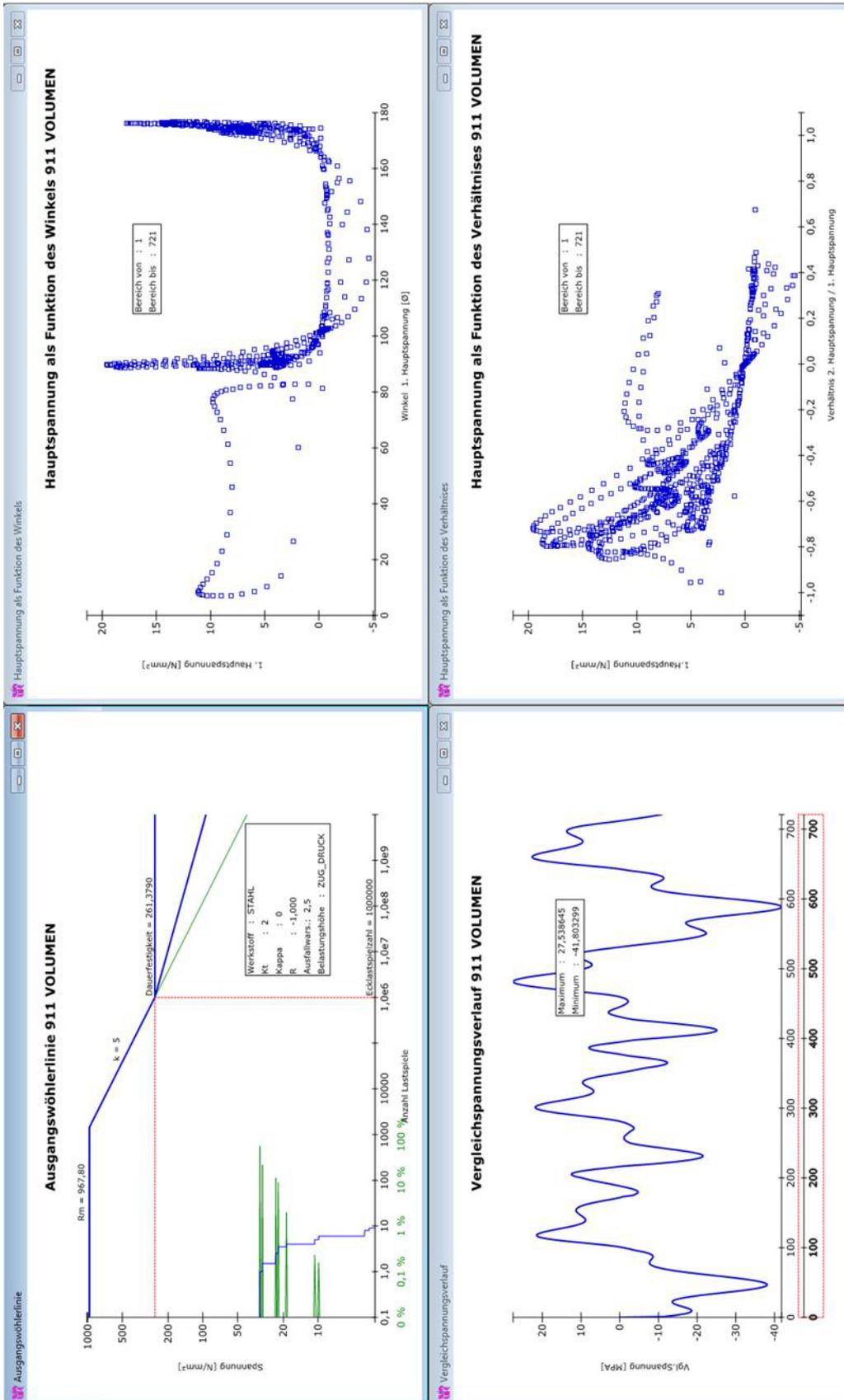


Abbildung A2 / 31: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFLex_e30_d2

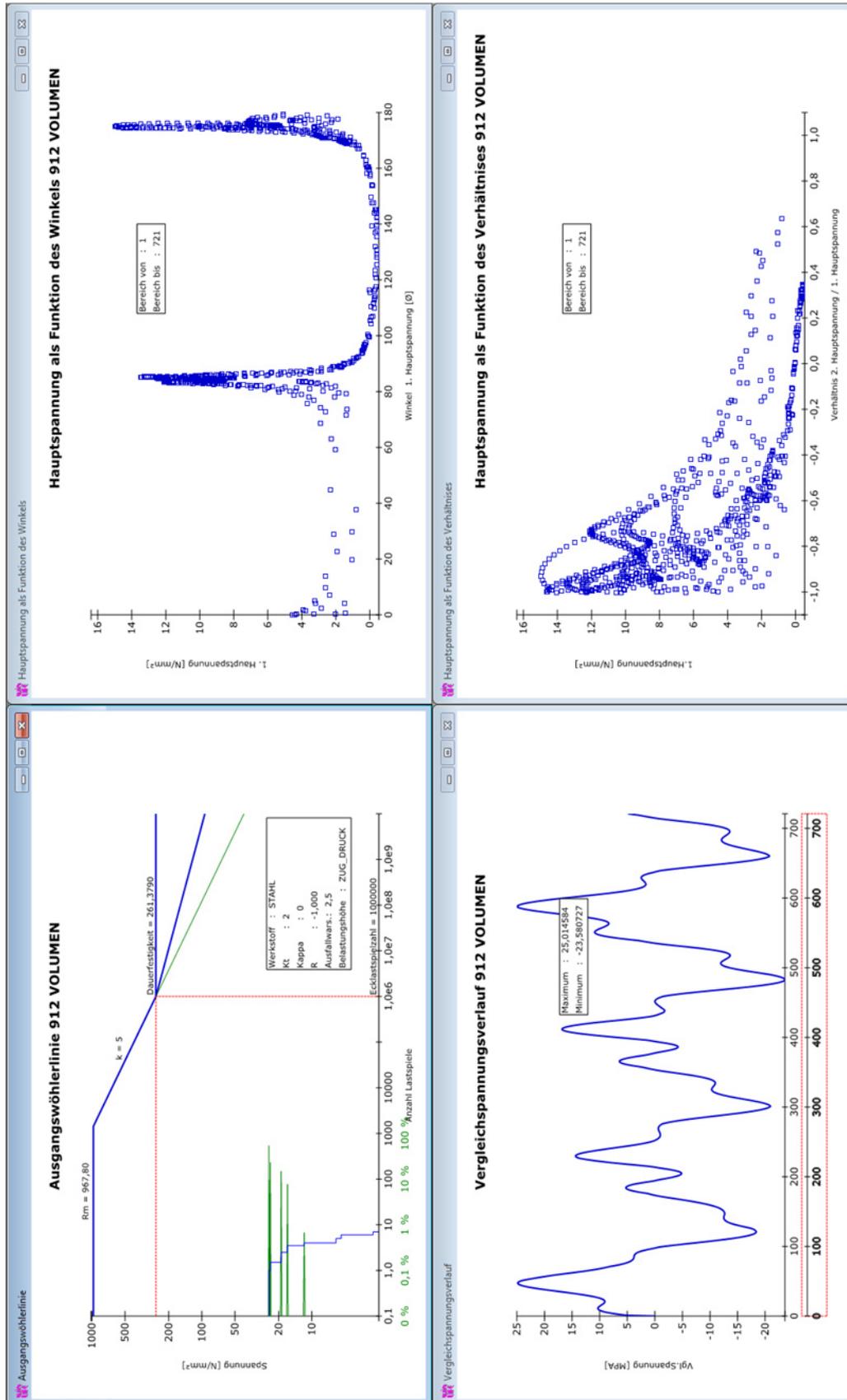


Abbildung A2 / 32: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFLex_e30_d2

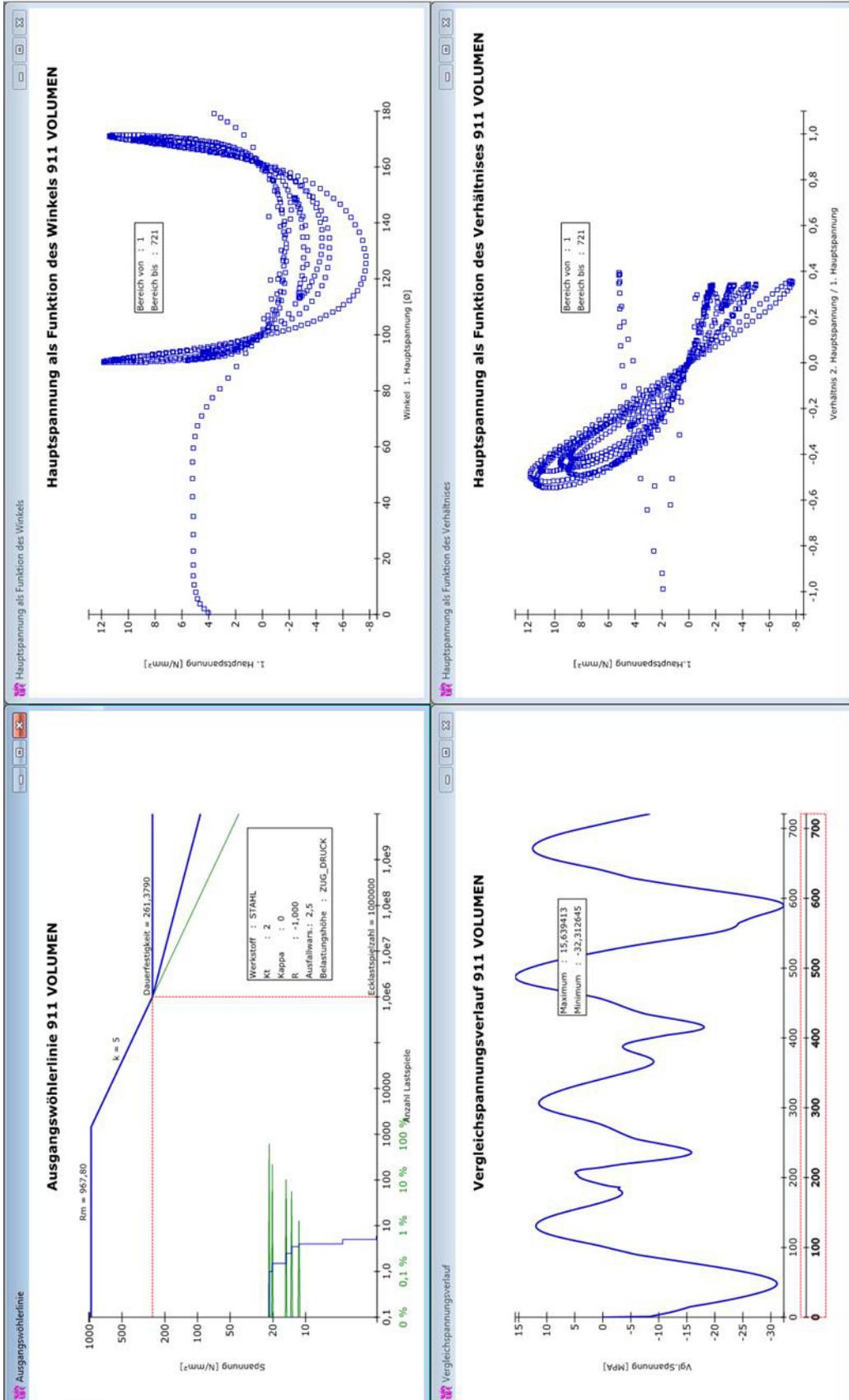


Abbildung A2 / 33: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e30r1_d1

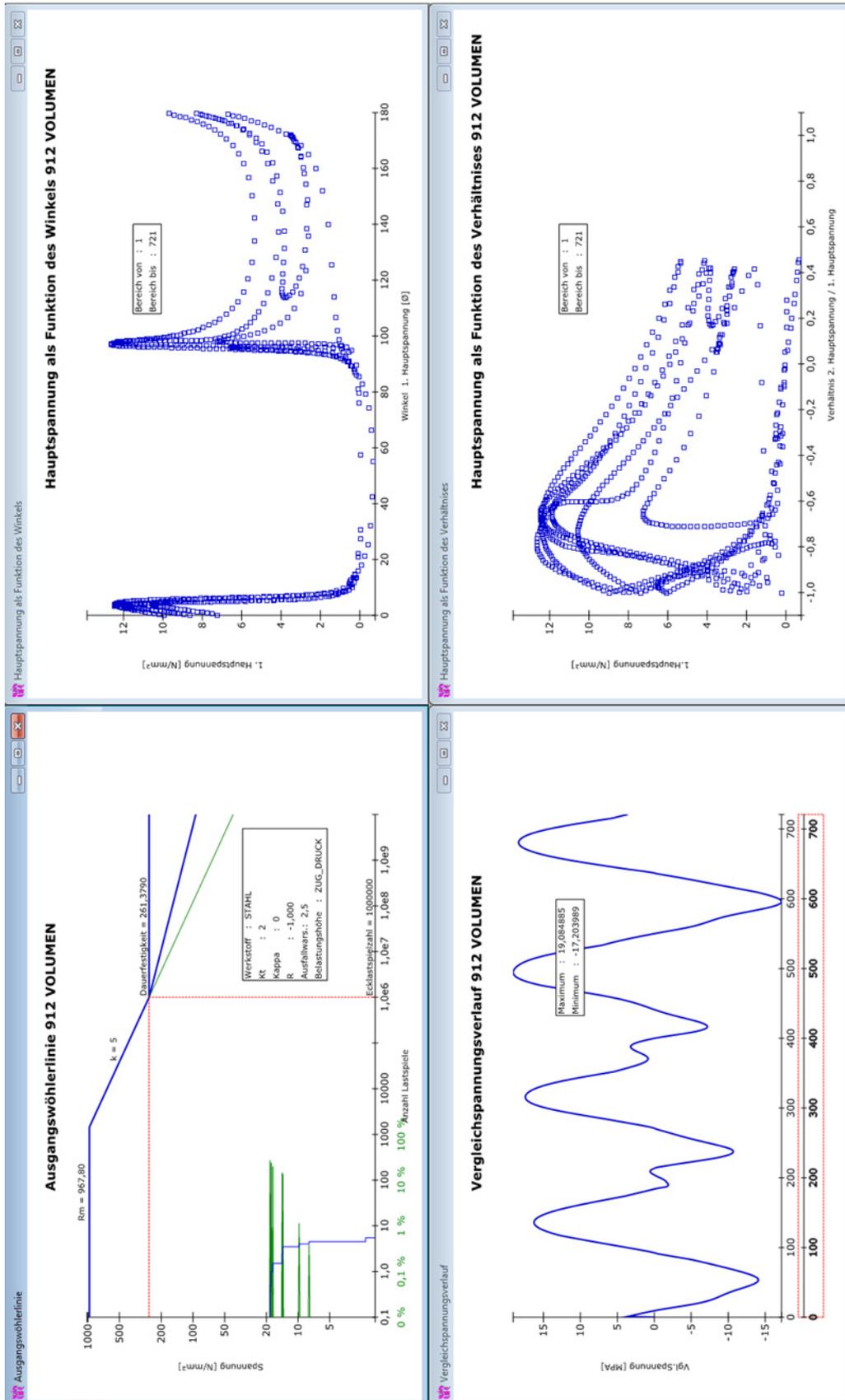


Abbildung A2 / 34: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e30r1_d1

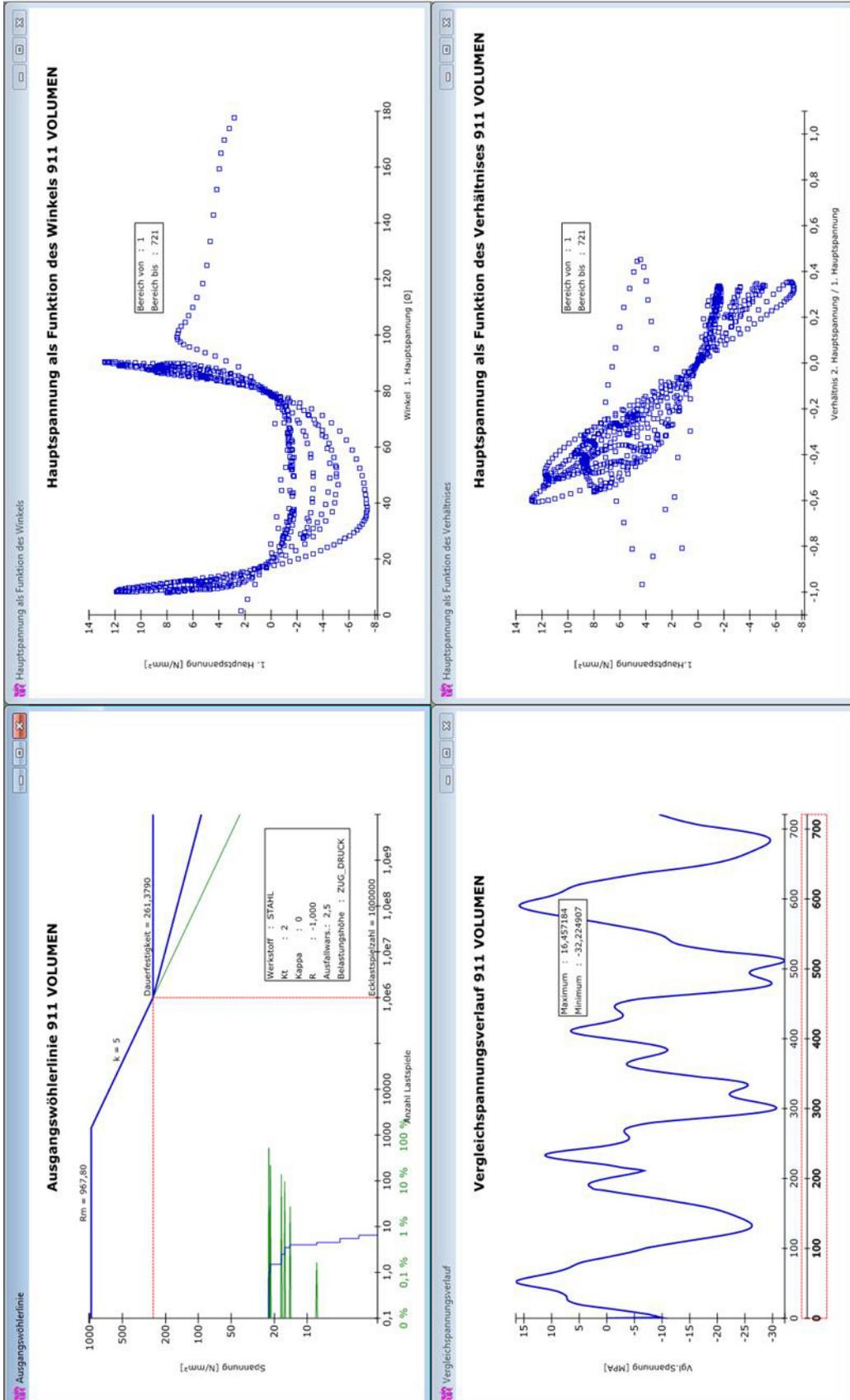


Abbildung A2 / 35: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e30r1_d2

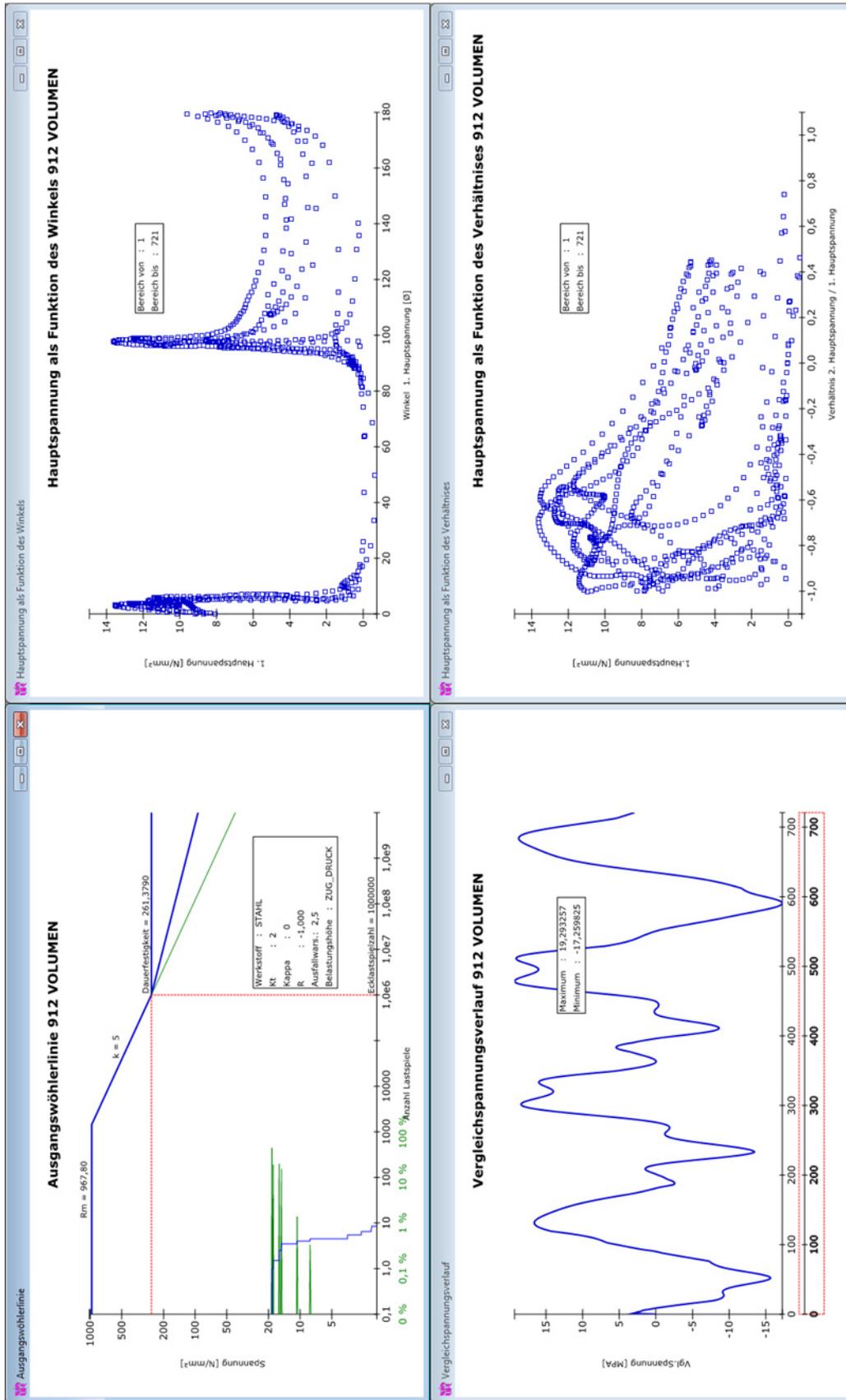


Abbildung A2 / 36: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e30r1_d2

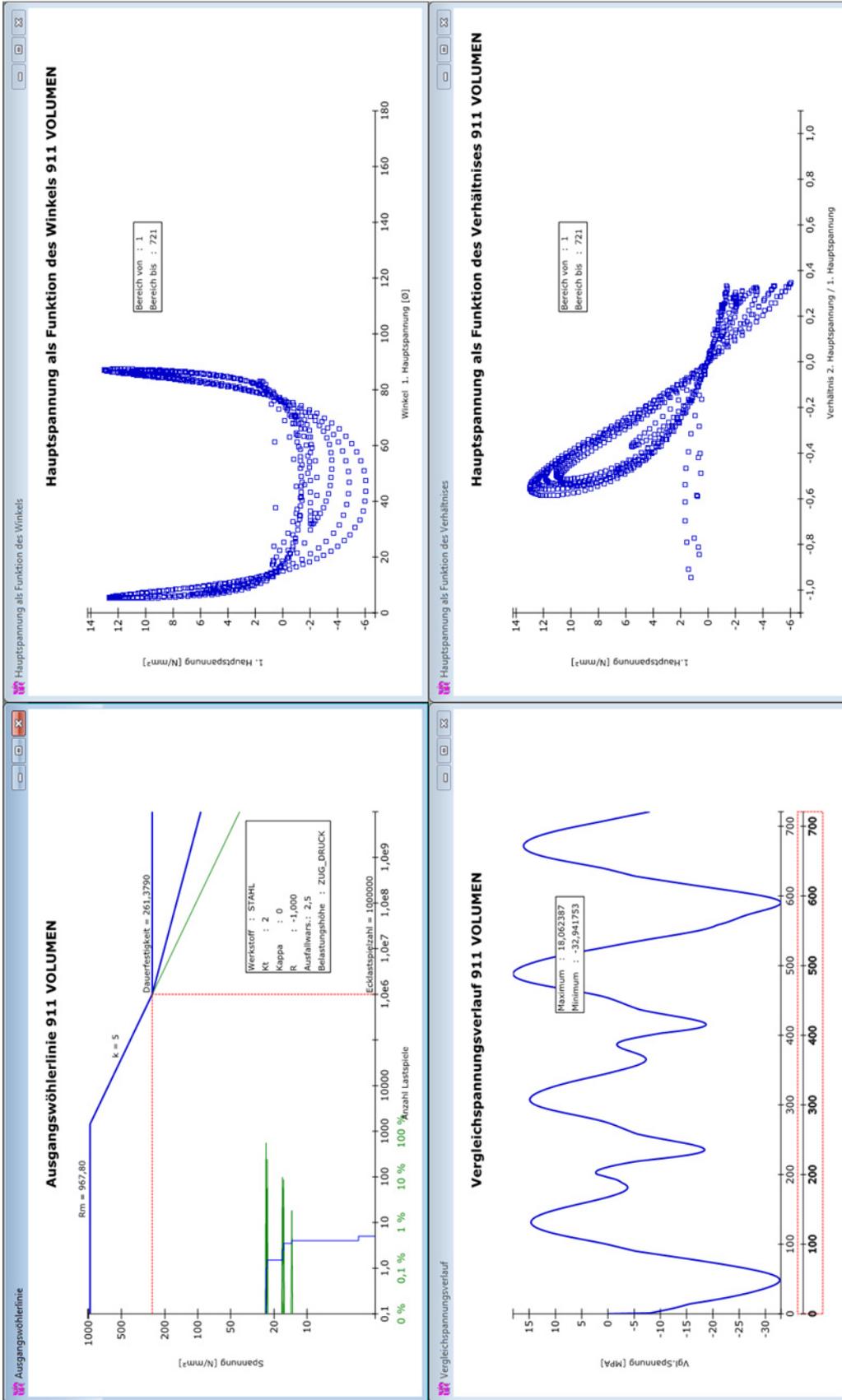


Abbildung A2 / 37: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFLex_e30r2_d1

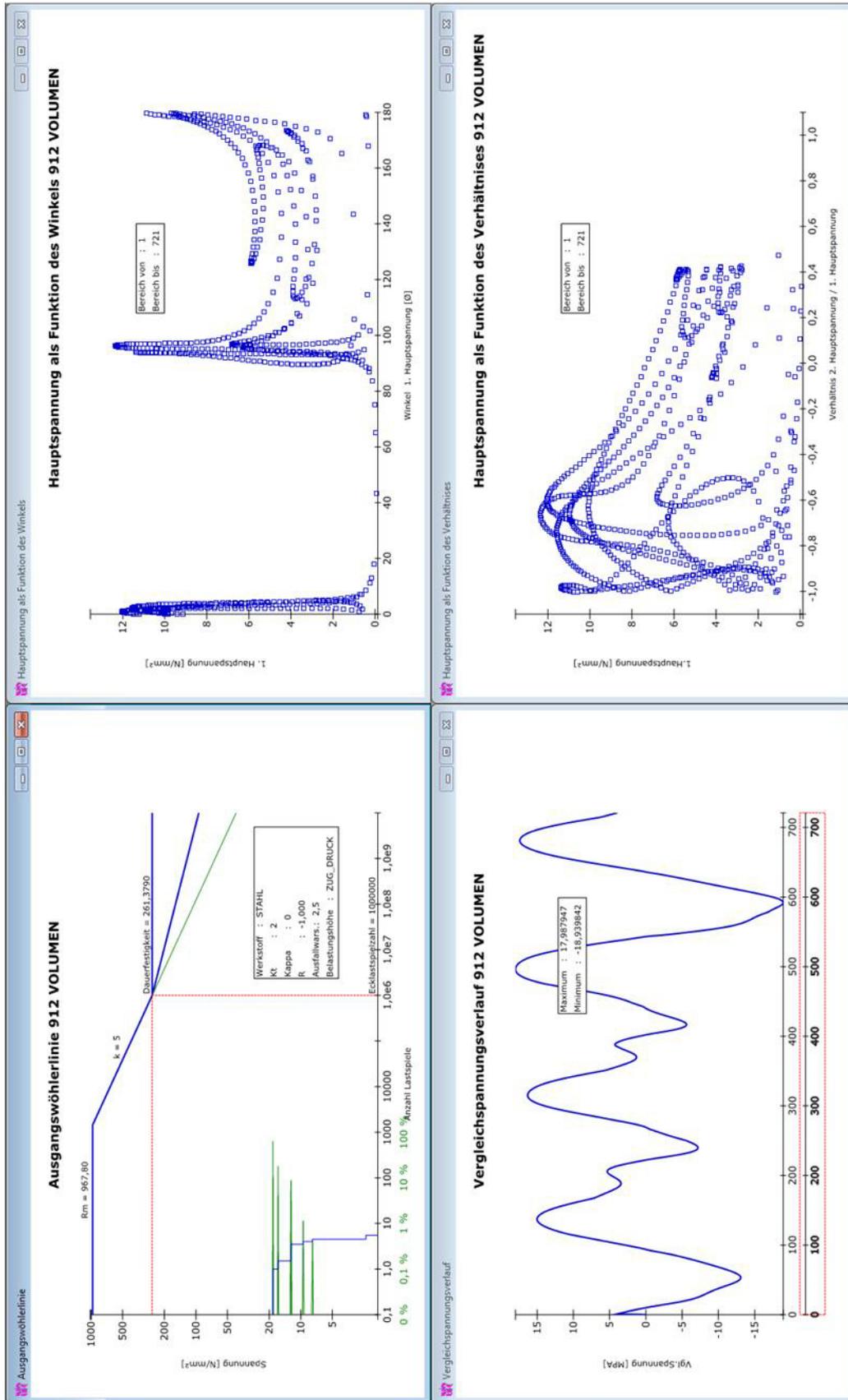


Abbildung A2 / 38: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e30r2_d1

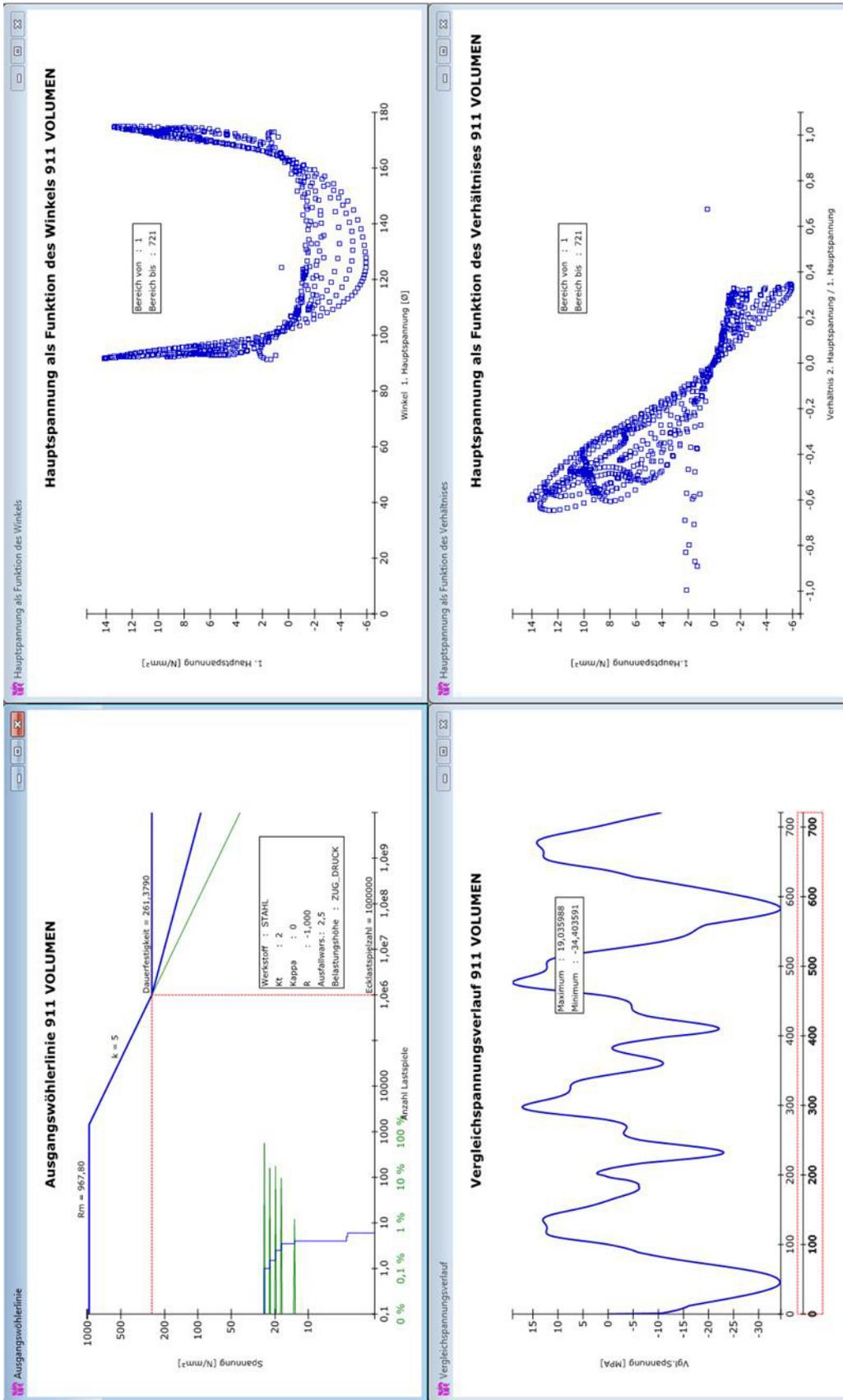


Abbildung A2 / 39: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e30r2_d2

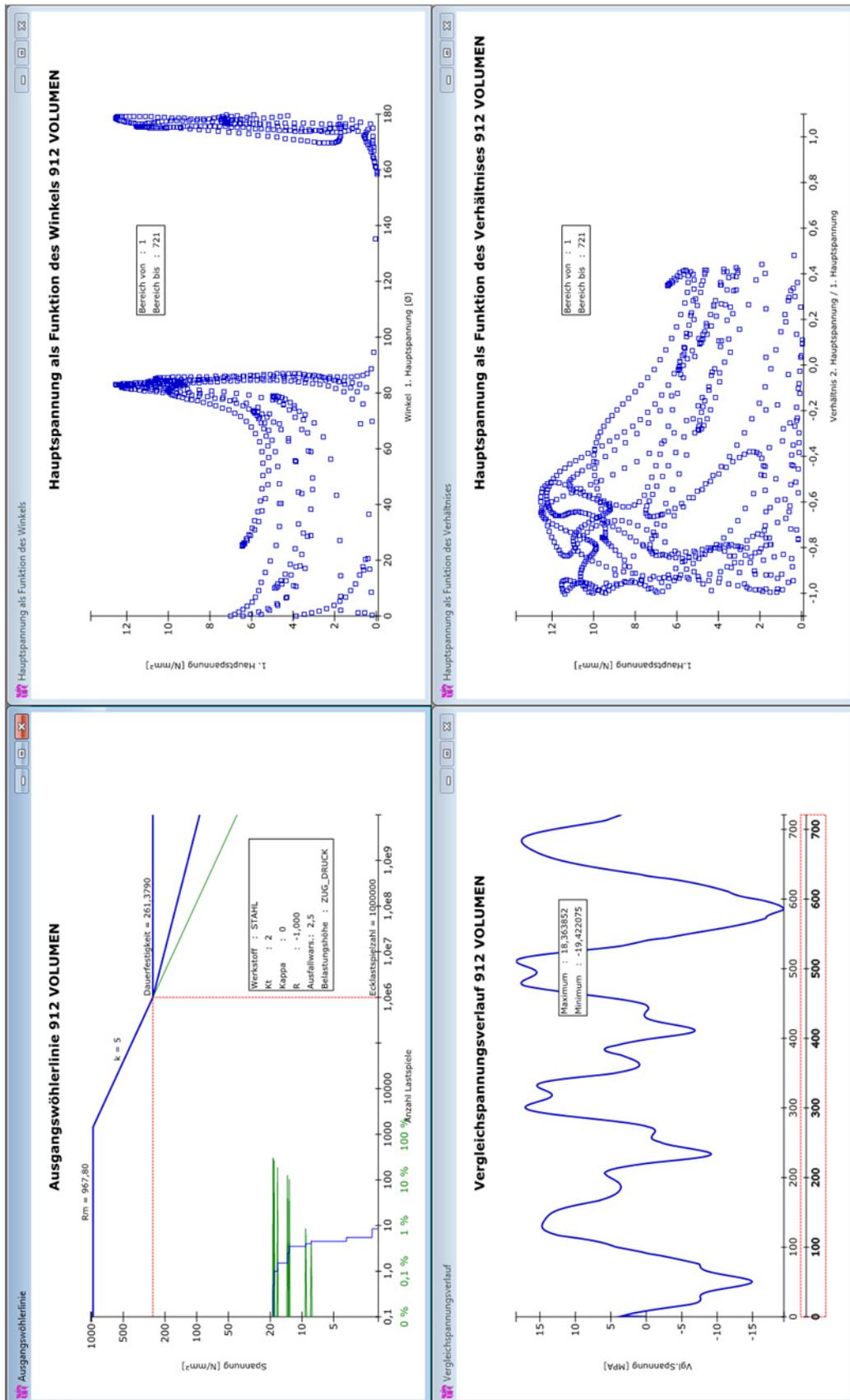


Abbildung A2 / 40: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e30r2_d2

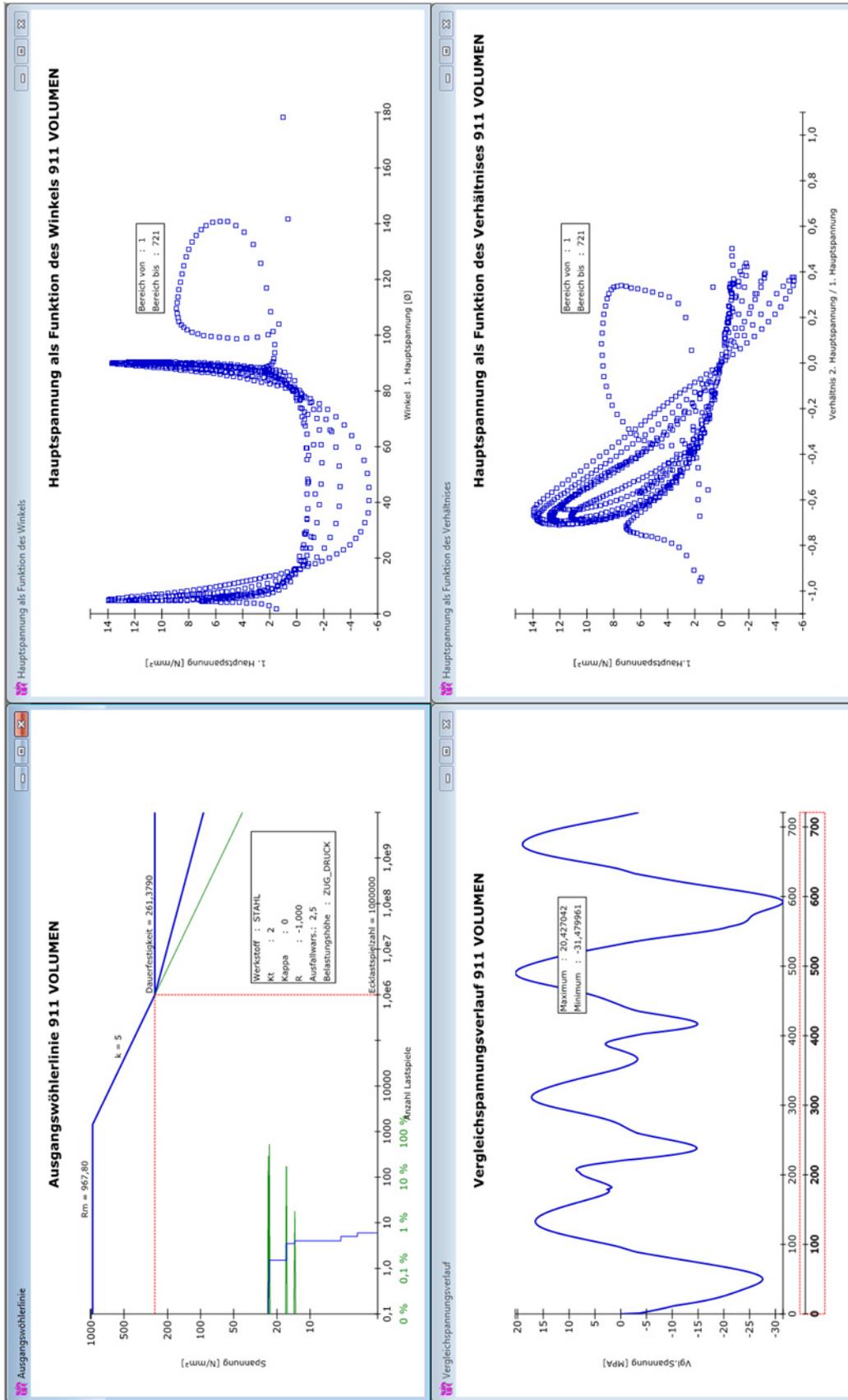


Abbildung A2 / 41: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40_d1

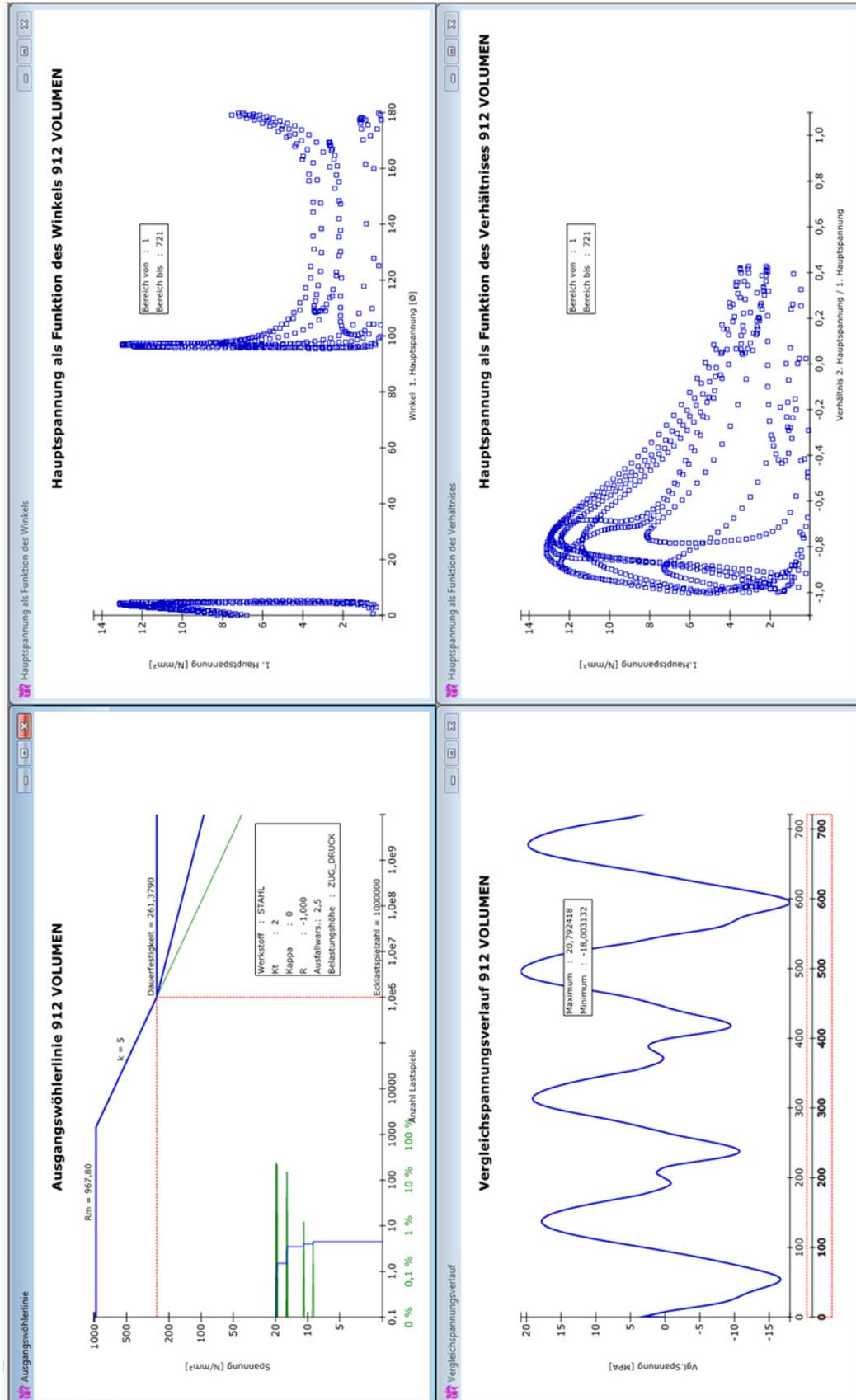


Abbildung A2 / 42: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFLex_e40_d1

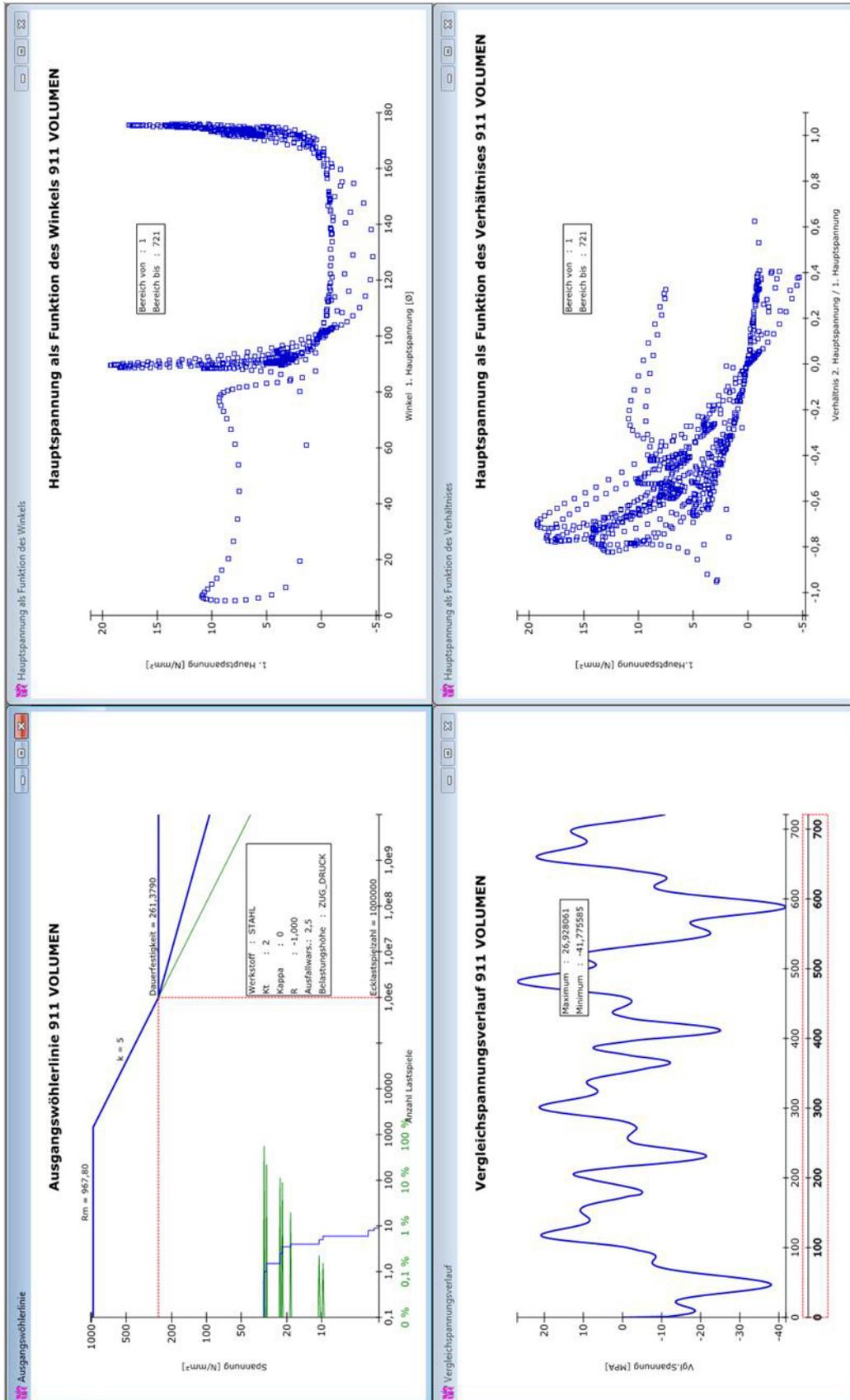


Abbildung A2 / 43: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40_d2

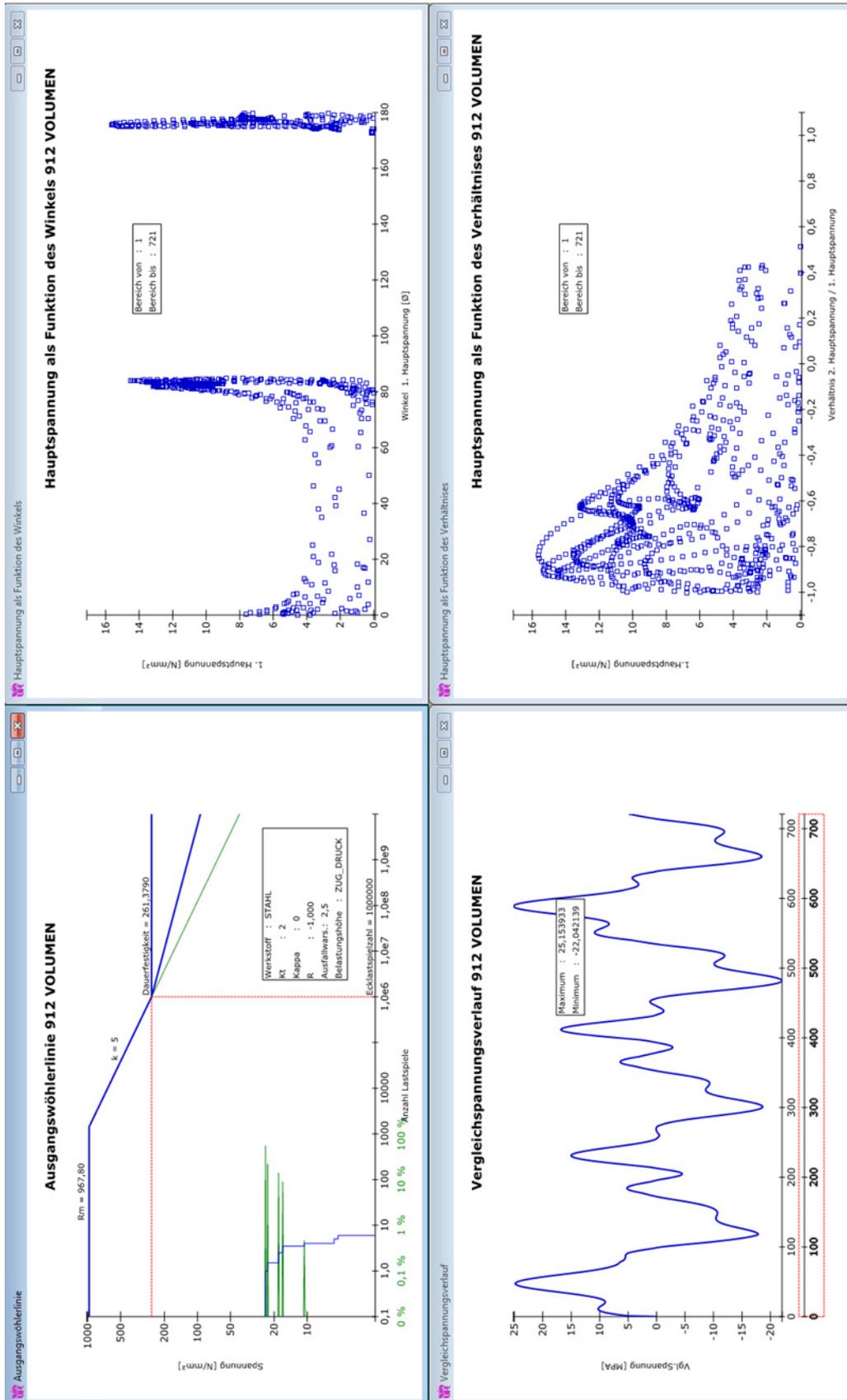


Abbildung A2 / 44: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFLex_e40_d2

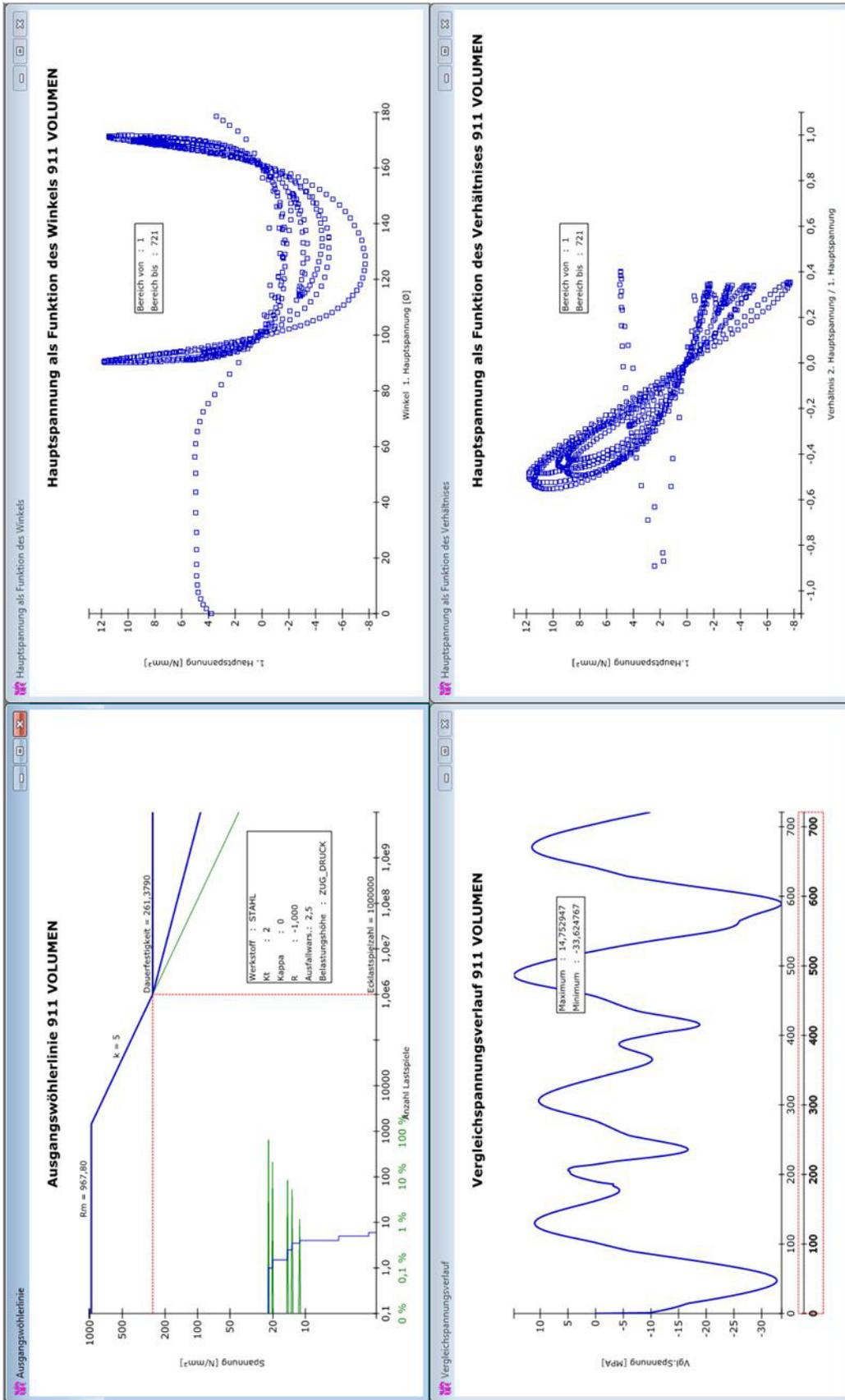


Abbildung A2 / 45: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40r1_d1

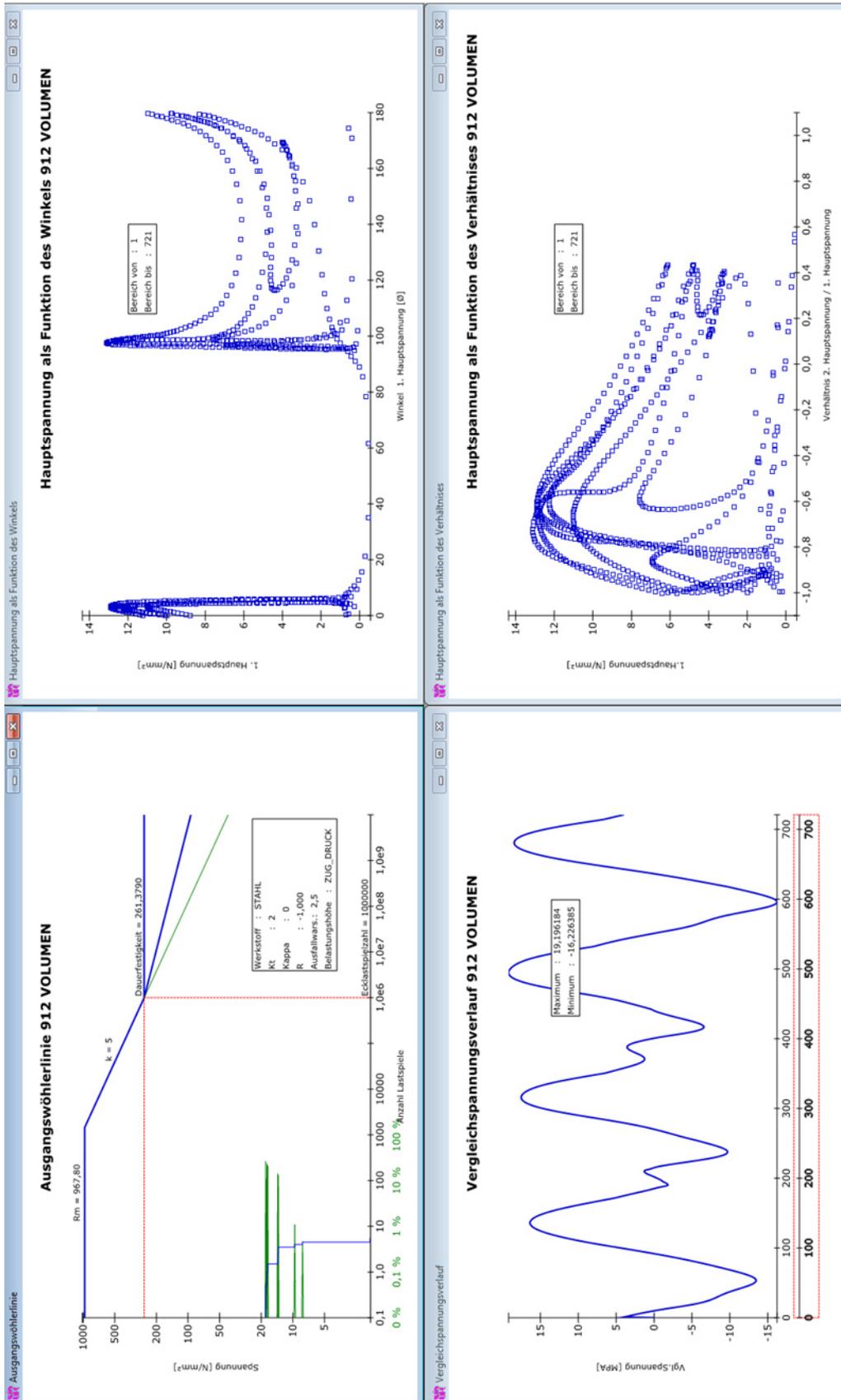


Abbildung A2 / 46: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e40r1_d1

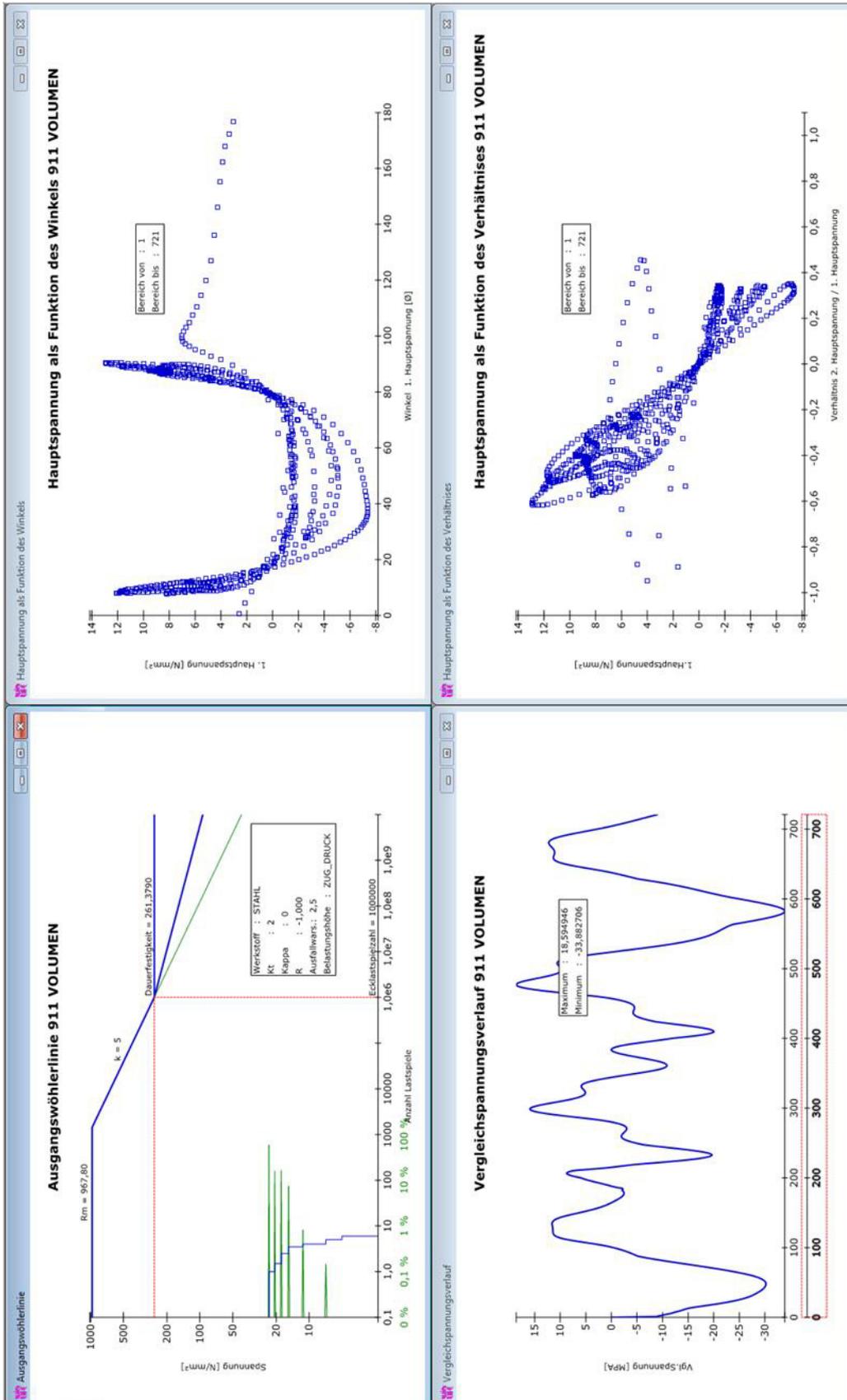


Abbildung A2 / 47: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40r1_d2

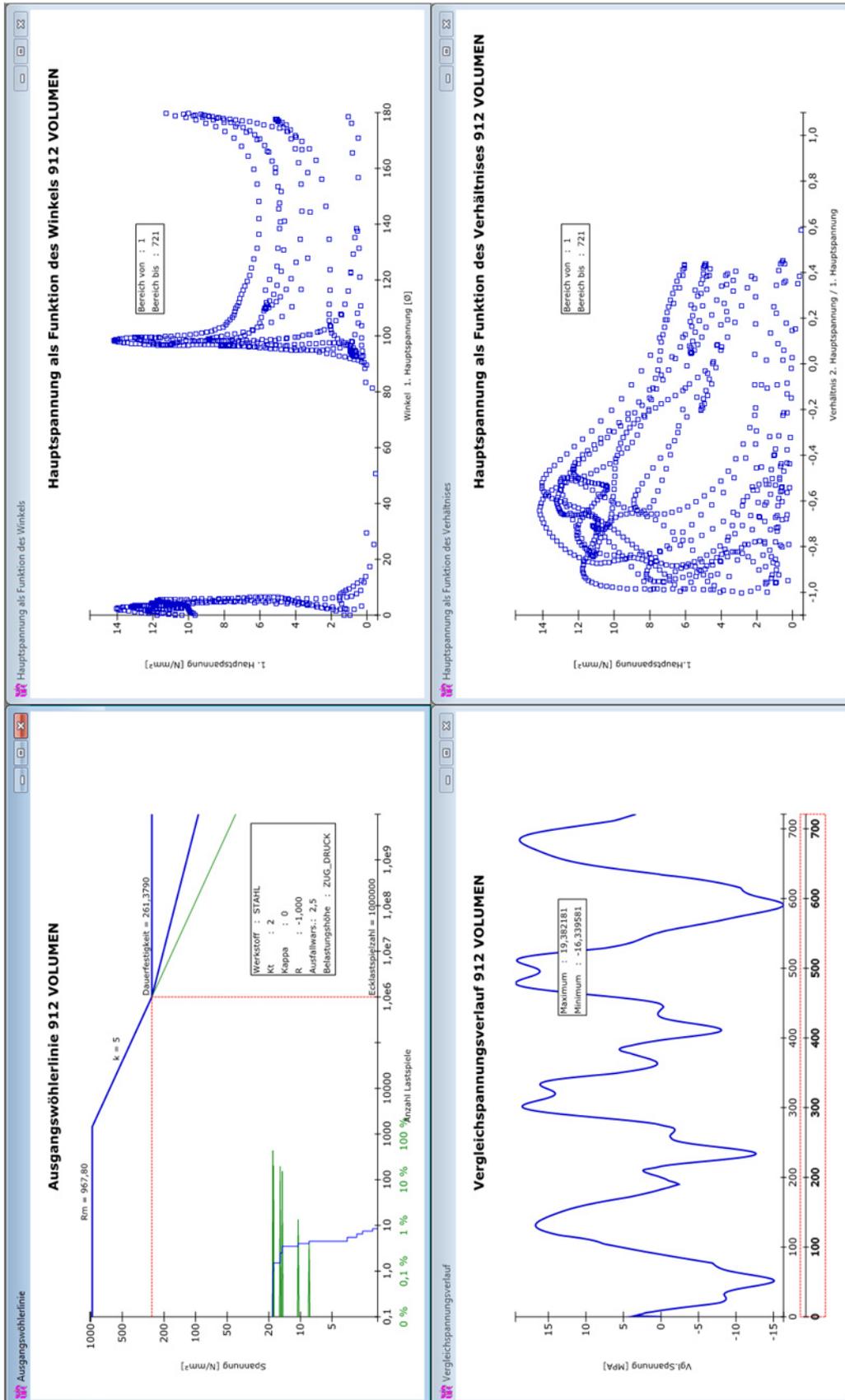


Abbildung A2 / 48: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e40r1_d2

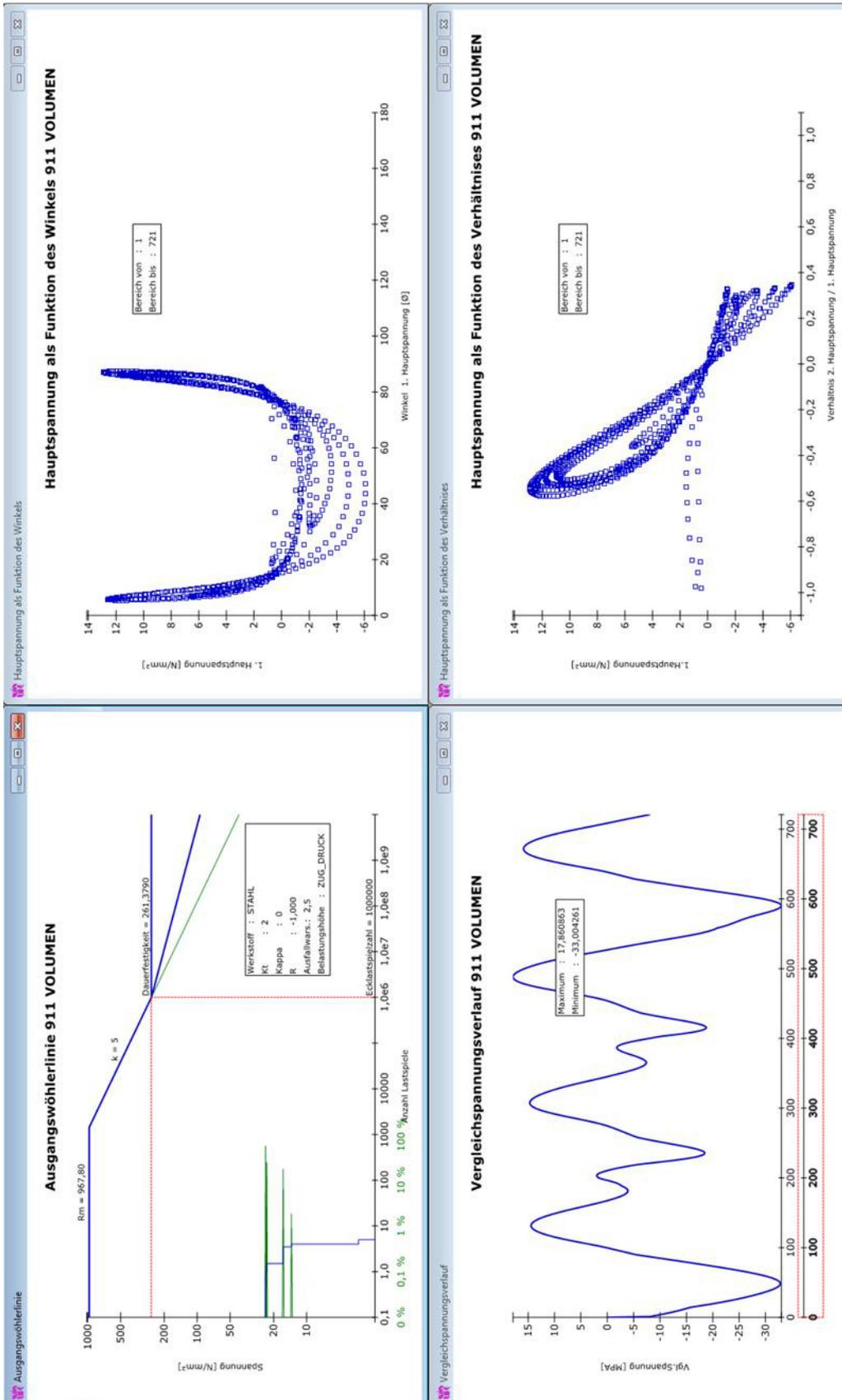


Abbildung A2 / 49: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40r2_d1

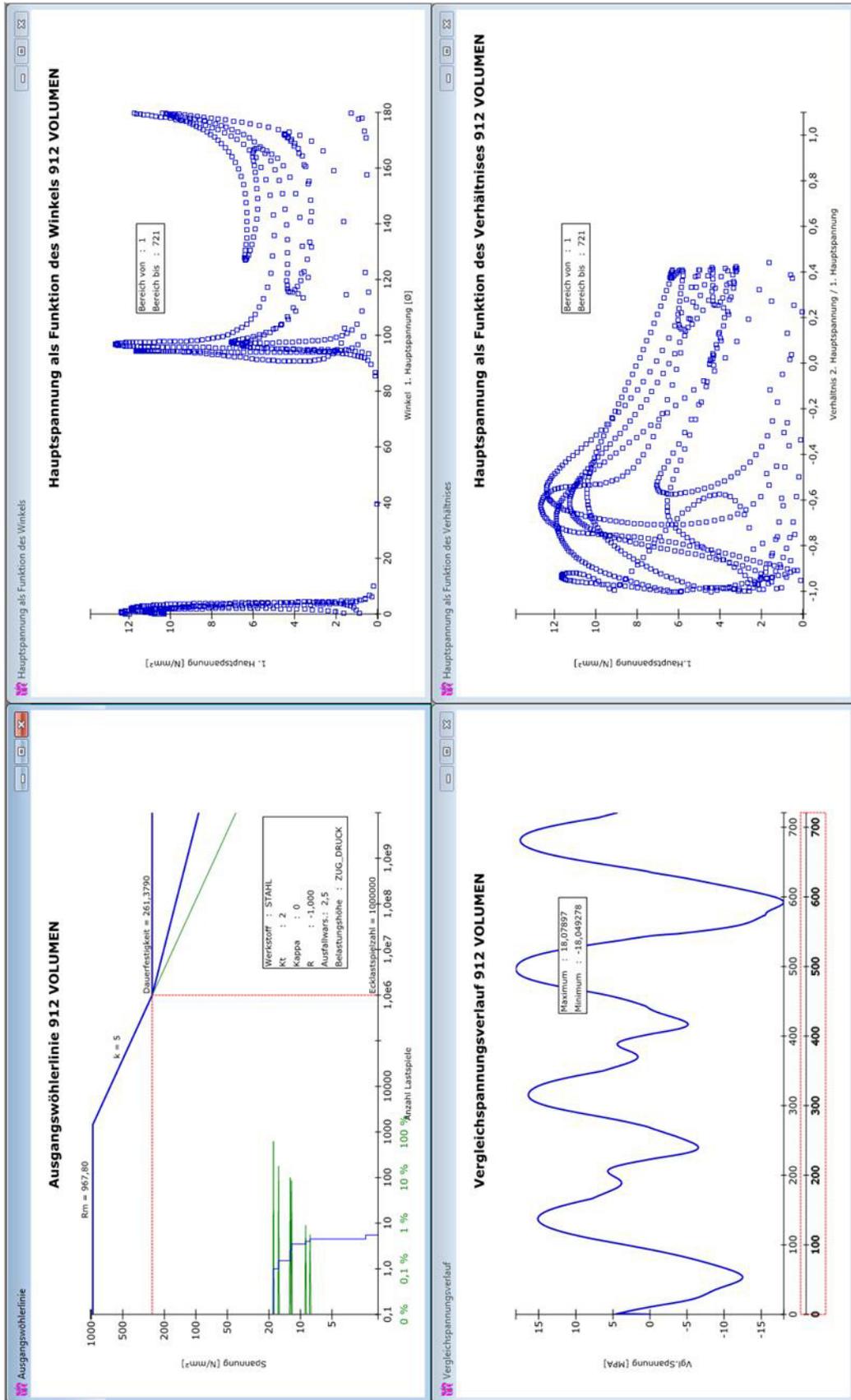


Abbildung A2 / 50: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e40r2_d1

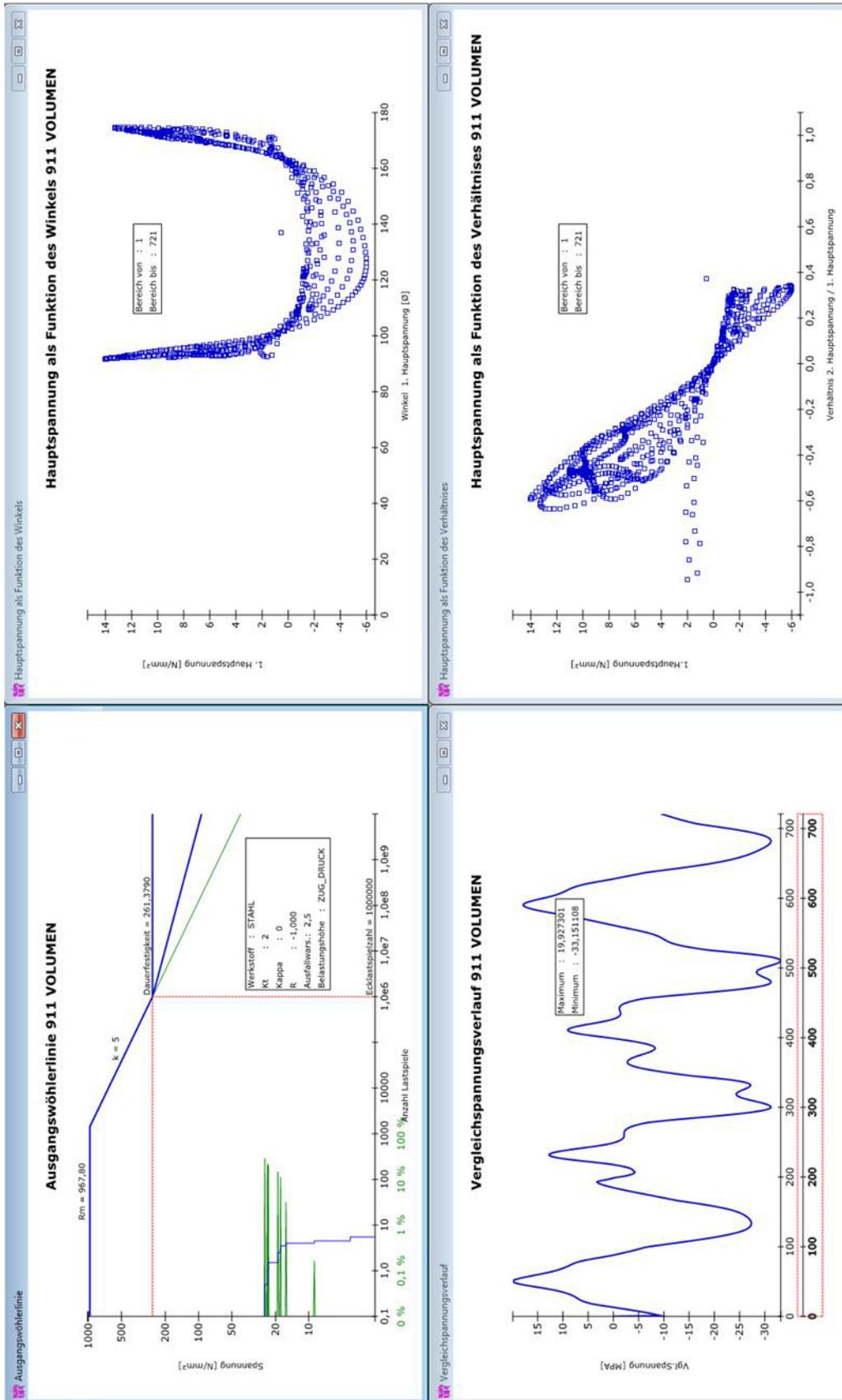


Abbildung A2 / 51: winLIFE Ergebnisse - N911 - RFlex_e40r2_d2

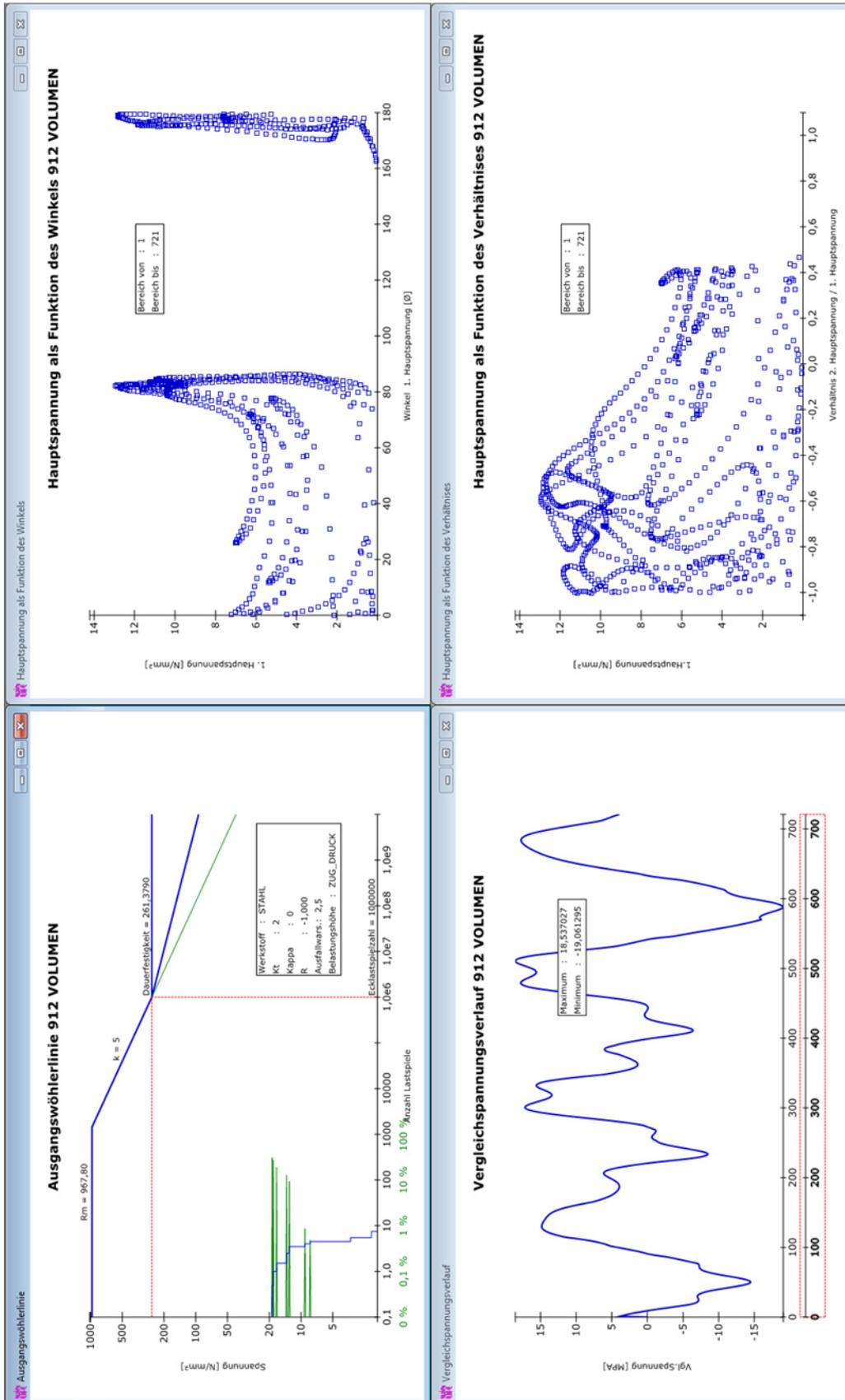


Abbildung A2 / 52: winLIFE Ergebnisse - N912 - RFlex_e40r2_d2

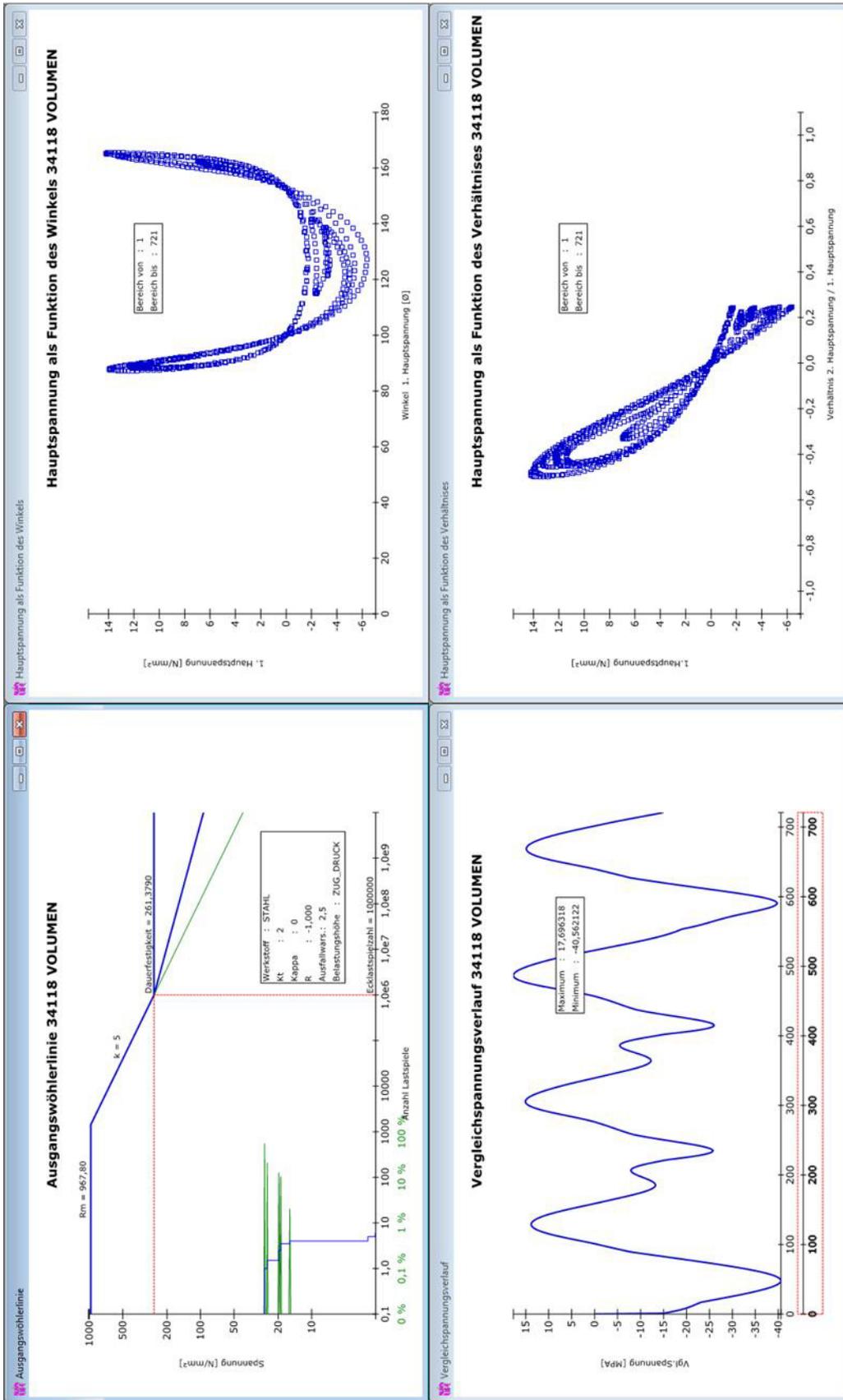


Abbildung A2 / 53: winLIFE Ergebnisse - N34118 Submodell - RFlex_e20r2_d1

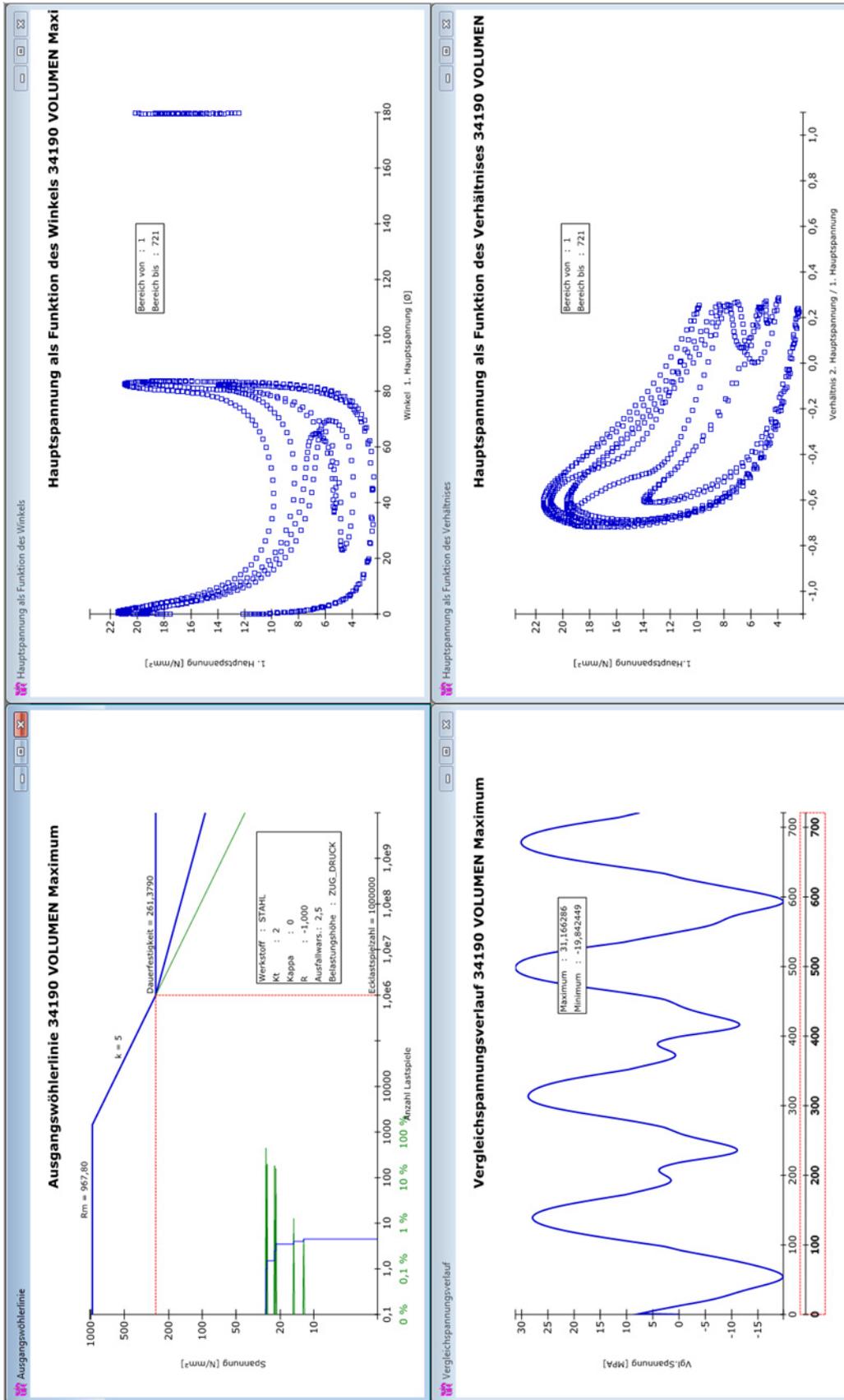


Abbildung A2 / 54: winLIFE Ergebnisse - N34190 Submodell - RFlex_e20r2_d1

Anhang, Teil 3

Die Berechnung des Einführungsbeispiels „Biegebalken“ (Kapitel 5) erfolgte durchgehend analytisch, wobei die Software Mathcad Prime 4.0 des Herstellers PTC Inc. (www.PTC.com) verwendet wurde. Zur Nachvollziehbarkeit der Berechnungsschritte sind die Berechnungsblätter in diesem Anhang enthalten.

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Intro

Das Ausschwingverhalten eines Kragträgers mit Zusatzmasse und externem Feder-Dämpferelement soll für eine nachfolgende Lebensdaueranalyse ermittelt werden.

Drei Berechnungsmodelle werden dabei angewandt um den Einfluss alternativer Reduktionsverfahren und deren Handhabung zu untersuchen.

Die erste Modellvariante verwendet kein Reduktionsverfahren und arbeitet mit den vollen Matrizen des Systems. Bei der zweiten und der dritten Modellvariante wird der Kragträger durch ein Superelement abgebildet, was eine Reduktion der Freiheitsgrade zur Folge hat. Im Gesamtsystem wird an diesem Superelement eine Zusatzmasse am freien Ende sowie ein Feder/Dämpferelement zur ruhenden Umgebung (Ground) angebracht

Das Gesamtprojekt besteht aus den folgenden Teilaufgaben welche in den angeführten Dateien dokumentiert sind:

<u>00) Beschreibung der Aufgabenstellung</u>	--> 00_Intro.mcdx
S1) Kragträger (Einzelteil) - direkte Methode	--> S1_DIREKT.mcdx
S2) Kragträger GUYAN Reduktion (Statische Kondensation)	--> S2_GUYAN.mcdx
S3) Kragträger CMS Reduktion (Component Mode Synthesis)	--> S3_CMS.mcdx
A1) Gesamtsystem - Modalanalyse	--> A1_DIREKT.mcdx
A2) Gesamtsystem - Modalanalyse (GUYAN Superelement)	--> A2_GUYAN.mcdx
A3) Gesamtsystem - Modalanalyse (CMS Superelement)	--> A3_CMS.mcdx
B1) Gesamtsystem - freie Schwingung	--> B1_DIREKT.mcdx
B2) Gesamtsystem - freie Schwingung (GUYAN Superelement)	--> B2_GUYAN.mcdx
B3) Gesamtsystem - freie Schwingung (CMS Superelement)	--> B3_CMS.mcdx
00) Vergleich der Ergebnisse	--> 00_Vergleich.mcdx

Für die spätere Verwendung im Gesamtmodell werden die erforderlichen Schnittstellenknoten festgelegt:

Am freien Ende des Kragträgers wird eine Zusatzmasse angebracht: $mdof_1 := 1$

In der Mitte des Trägers wird ein viskoser Dämpfer befestigt: $mdof_2 := 3$

$$mdof^T = [1 \ 3]$$

Bei der CMS Reduktion werden zur Verbesserung der dynamischen Eigenschaften Eigenmoden zur Beschreibung verwendet.

Die Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden beträgt: $n_q := 8$

$$DATA_8 := n_q = 8$$

Kenndaten der Anbindungselemente:

Steifigkeit Lager: $k_b := \frac{100 \text{ N}}{\text{mm}}$ $DATA_9 := k_b \cdot \frac{m}{N}$

viskose Dämpfung Lager: $d_b := \frac{1 \text{ N} \cdot \text{s}}{m}$ $DATA_{10} := d_b \cdot \frac{s}{kg}$

Zusatzmasse Balkenende: $m_b := 2 \text{ kg}$ $DATA_{11} := \frac{m_b}{kg}$

Anfangsbedingungen für die freie Schwingung:

Als Anfangswerte für die freie Schwingung wird die Deformation durch eine statische Belastung F_{stat} am Knoten k_F festgelegt. Die Berechnung der Verformung erfolgt entsprechend der Differentialgleichung der Biegelinie für einen Kragträger:

$$E_s \cdot I_s \cdot w''(y) = -M_b(y) \quad k_F := mdof_2 \quad F_{stat} := 25 \text{ N}$$

Mit Berücksichtigung des Überstandes zum Kraftangriffspunkt folgt für die Anfangsauslenkung:

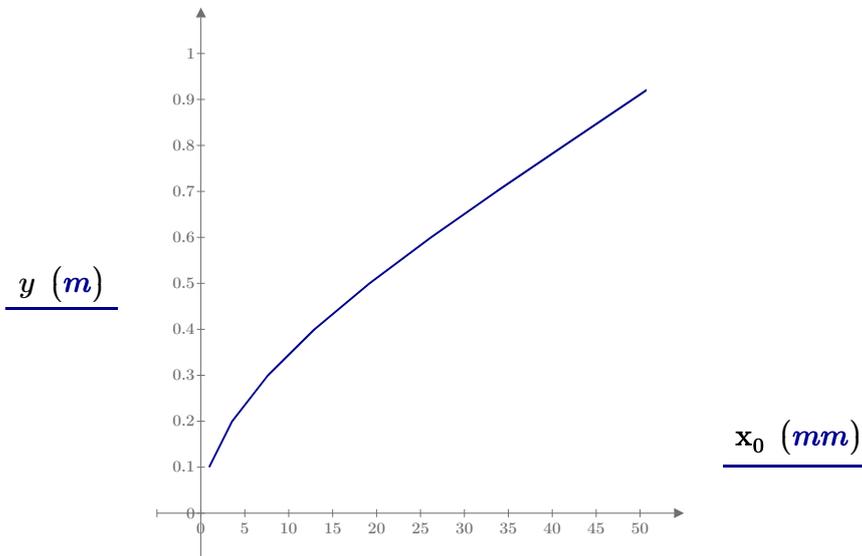
$$\mathbf{x}_0 := F_{stat} \cdot \begin{cases} \text{if } i < k_F \\ \frac{1}{E_s \cdot I_s} \cdot \left(\frac{y_{k_F}^3}{3} + \left(\frac{y_{k_F}^2}{2} \right) \cdot (y_i - y_{k_F}) \right) \\ \text{else} \\ \frac{1}{E_s \cdot I_s} \cdot \left(y_{k_F} \cdot \frac{y_i^2}{2} - \frac{y_i^3}{6} \right) \end{cases} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.049 \\ 0.041 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ m}$$

Die Anfangsgeschwindigkeiten werden zu Null gesetzt.

$$v_{0_i} := 0 \frac{m}{s}$$

$$v_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

Deformation in der statischen Ruhelage



Zusammenfassen der allgemeinen Modelldaten und Export:

$EXP_{data} := \text{WRITETEXT}(\text{"DATA.dat"}, DATA)$

$EXP_{mdof} := \text{WRITETEXT}(\text{"MDOF.dat"}, mdof)$

$EXP_{npos} := \text{WRITETEXT}(\text{"NPOS.dat"}, \frac{y}{m})$

$EXP_{x0} := \text{WRITETEXT}(\text{"x0.dat"}, \frac{x_0}{m})$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil S1

Eigenwertanalyse des Bauteils "Kragträger" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Erstellen von "Superelementen" zur späteren Verwendung im Kontext eines Gesamtmodells.

00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx

S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- a) Aufstellung der Systemmatrizen
- b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
- c) grafische Darstellung der Eigenvektoren
- d) Berechnung der Spannungstransformationsmatrix

S2) GUYAN Reduktion (Statische Kondensation) --> siehe S2_GUYAN.mcdx

S3) CMS Reduktion (Component Mode Synthesis) --> siehe S3_CMS.mcdx

S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- a) Aufstellen der Systemmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Dateien:

$DATA := \text{READTEXT}(\text{"DATA.dat"})$

Anzahl der Knoten: $n_k := DATA_1$ $n_k = 10$

Durchmesser: $d_s := DATA_2 \cdot m$ $d_s = 0.01 \text{ m}$

Länge: $l_s := DATA_3 \cdot m$ $l_s = 1 \text{ m}$

Elastizitätsmodul: $E_s := DATA_4 \cdot MPa$ $E_s = (2.1 \cdot 10^5) \text{ MPa}$

Dichte: $\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$

Masse Stab: $m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \text{ kg}$

Flächenträgheitsmoment: $I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \text{ mm}^4$

Raleigh-Dämpfung: $\alpha := DATA_6$ $\alpha = 0.375$

$\beta := DATA_7$ $\beta = 0.002$

Knotenpositionen:

$y := \text{READTEXT}(\text{"NPOS.dat"})$ $y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$

Aufstellen der Bewegungsgleichung:

$$i := 1, 2 \dots n_k$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}'' + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0$$

$$k := 1, 2 \dots n_k$$

Massenmatrix:

Massenpunkte: $m_0 := \frac{m_s}{n_k} = (6.165 \cdot 10^{-2}) \text{ kg}$ $m_s - \frac{m_0}{2} = 0.586 \text{ kg}$

einheitenbereinigte Massenmatrix:

$$\mathbf{M}_{i,i} := \frac{1}{\text{kg}} \cdot \begin{cases} \text{if } i = 1 \\ \left\| \begin{array}{c} m_0 \\ 2 \end{array} \right\| \\ \text{else} \\ \left\| m_0 \right\| \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.031 & 0 & & \\ 0 & 0.062 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

Die Steifigkeitsmatrix wird aus der Nachgiebigkeitsmatrix berechnet. Deren Koeffizienten, die Einflusszahlen $a_{i,k}$, bezeichnen die Deformation an der Stelle i infolge einer Einheitslast an der Stelle k.

Koeffizienten der Nachgiebigkeitsmatrix:

$$\mathbf{a}_{i,k} := \begin{cases} m^3 \cdot \text{if } i < k \\ \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{E_s \cdot I_s} \cdot \left(\frac{y_k^3}{3} + \left(\frac{y_k^2}{2} \right) \cdot (y_i - y_k) \right) \\ \text{else} \\ \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{E_s \cdot I_s} \cdot \left(y_k \cdot \frac{y_i^2}{2} - \frac{y_i^3}{6} \right) \end{array} \right\| \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3.234 & 2.75 & & \\ 2.75 & 2.357 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \frac{mm}{N} \end{matrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix ist die Inverse der Nachgiebigkeitsmatrix mit bereinigen der Einheiten:

$$\mathbf{K} := \mathbf{a}^{(-1)} \quad \mathbf{K}_{i,k} := \mathbf{K}_{i,k} \cdot \frac{m}{N}$$

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.657 \cdot 10^5 & & \\ -3.759 \cdot 10^5 & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \alpha \cdot M + \beta \cdot K$$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 331.465 & -751.72 & & \\ -751.72 & 2.036 \cdot 10^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

S2) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$i := 1, 2 \dots n_k$$

$$k := 1, 2 \dots n_k$$

Eigenwerte berechnen und sortieren:

$$\lambda := \text{eigenvals}(M^{(-1)} \cdot K) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.44 \cdot 10^7 \\ 5.923 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.048 \cdot 10^3 \\ 7.866 \cdot 10^4 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 45.256 \\ 280.459 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{Hz}{2 \pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.203 \\ 44.636 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} Hz$$

$$V^{(i)} := \text{eigenvec}(M^{(-1)} \cdot K, \lambda_i) \quad V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.575 & 0.564 & & \\ -0.496 & 0.289 & & \\ -0.417 & 0.029 & & \\ -0.34 & -0.19 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Normierung der Eigenvektoren

$$n_{A_{1,k}} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (V_{i,k})^2}} \quad V_{i,k} := n_{A_{1,k}} \cdot V_{i,k} \quad n_A = \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

c) grafische Darstellung der Eigenvektoren

$$i := 1, 2 \dots n_k$$

$$k := 1, 2 \dots n_k + 1$$

$$V_{G_{i,1}} := \frac{y_i \cdot m}{l_s}$$

$$V_G^{(i+1)} := V^{(i)}$$

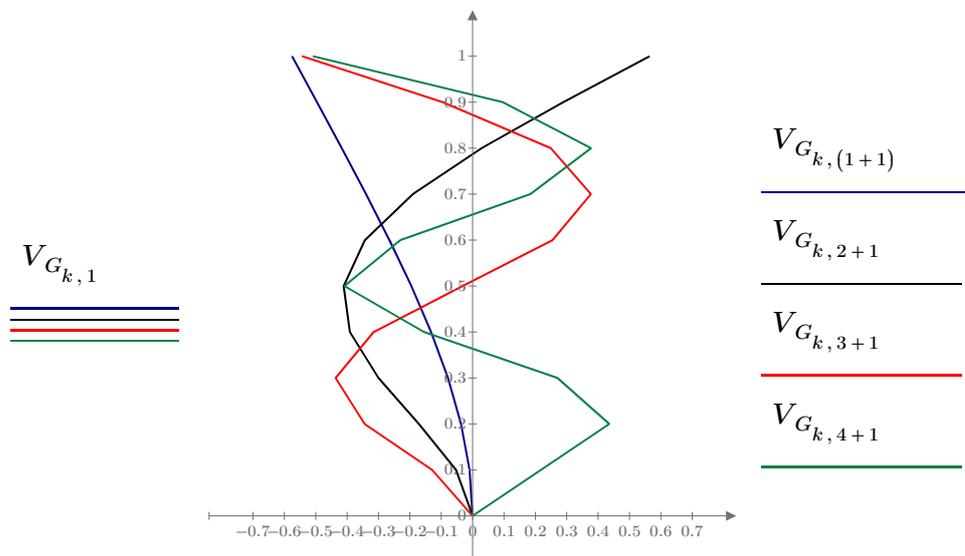
$$V_{G_{n_k+1,1}} := 0$$

$$V_{G_{n_k+1,i+1}} := 0$$

$$V_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -0.575 & 0.564 & -0.544 & & \\ 0.9 & -0.496 & 0.289 & -0.095 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$f_0 = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 44.6 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

grafische Darstellung der ersten vier Eigenvektoren



S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

d) Berechnung der Spannungstransformationsmatrix

Biegespannungen:

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Die auftretenden zeitabhängigen Spannungen in der Balkenstruktur wird entsprechend der Gleichung der Biegelinie berechnet. Es wird analog der Berechnung der Nachgiebigkeitsmatrix vorgegangen:

$$E_s \cdot I_s \cdot w''(y) = -M_b(y) \quad \text{dabei ist:} \quad w''(y) = \frac{1}{\rho} = \rho_{inv}$$

Die Matrix η beschreibt die zweite Ableitung der Deformation, also die Inverse der Krümmung ρ . Die Koeffizienten $\eta_{i,k}$ bezeichnen die Inverse der Krümmung an der Stelle i infolge einer Einheitslast an der Stelle k .

$$\eta_{i,k} := \begin{cases} \text{if } i < k \\ 0 \cdot \frac{1}{J} \\ \text{else} \\ \frac{1}{E_s \cdot I_s} \cdot (y_k - y_i) \cdot m \end{cases} \quad \eta = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 9.701 \cdot 10^{-4} & 0 & & \\ 0.002 & 9.701 \cdot 10^{-4} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{1}{J}$$

Die Krümmung wird über folgende Zusammenhänge bestimmt:

$$F = K \cdot x = a^{-1} \cdot x \quad F = \eta^{-1} \cdot \rho_{inv} \quad a^{-1} \cdot x = \eta^{-1} \cdot \rho_{inv} \quad \rho_{inv} = \eta \cdot a^{-1} \cdot x$$

Unter Verwendung der zeitabhängigen Verschiebungsvektoren werden die Spannungen σ , für den Biegebalken, berechnet. durch Einführung der Spannungstransformationsmatrix lässt sich schreiben:

$$\sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \rho_{inv} \quad \sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \eta \cdot a^{-1} \cdot x \quad \sigma = T_\sigma \cdot x$$

$$T_\sigma := \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \eta \cdot a^{-1} \quad T_\sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 1.688 \cdot 10^{11} & -3.828 \cdot 10^{11} & & \\ -4.523 \cdot 10^{10} & 2.714 \cdot 10^{11} & & \\ 1.212 \cdot 10^{10} & -7.272 \cdot 10^{10} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{N}{m^3}$$

Export der Systemmatrizen zur späteren Verwendung:

$$EXP_M := \text{WRITETEXT}("f_Me.dat", M)$$

$$EXP_K := \text{WRITETEXT}("f_Ke.dat", K)$$

$$EXP_D := \text{WRITETEXT}("f_De.dat", D)$$

Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Dateien:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}\left("f_f0e.dat", f_0 \cdot \frac{1}{\text{Hz}}\right)$$

$$EXP_V := \text{WRITETEXT}("f_V0e.dat", V)$$

Export der Spannungstransformationsmatrix:

$$EXP_S := \text{WRITETEXT}\left("f_Ts.dat", T_\sigma \cdot \frac{m^3}{N}\right)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil S2

Eigenwertanalyse des Bauteils "Kragträger" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Erstellen von "Superelementen" zur späteren Verwendung im Kontext eines Gesamtmodells.

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
- S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> S1_DIREKT.mcdx
- S2) GUYAN Reduktion (Statische Kondensation)
- a) Aufstellung der Systemmatrizen
 - b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
 - c) grafische Darstellung der Eigenvektoren
- S3) CMS Reduktion (Component Mode Synthesis) --> S3_CMS.mcdx

S2) GUYAN Reduktion

- a) Aufstellen der Systemmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Dateien:

$DATA := READTEXT("DATA.dat")$

Durchmesser:	$d_s := DATA_2 \cdot m$	$d_s = 0.01 \text{ m}$
Länge:	$l_s := DATA_3 \cdot m$	$l_s = 1 \text{ m}$
Elastizitätsmodul:	$E_s := DATA_4 \cdot MPa$	$E_s = (2.1 \cdot 10^5) \text{ MPa}$
Dichte:	$\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$	$\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$
Masse Stab:	$m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \text{ kg}$	
Flächenträgheitsmoment:	$I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \text{ mm}^4$	
Raleigh-Dämpfung:	$\alpha := DATA_6$	$\alpha = 0.375$
	$\beta := DATA_7$	$\beta = 0.002$

Import der Matrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M := \text{READTEXT}("f_Me.dat") \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.031 & 0 & & \\ 0 & 0.062 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K := \text{READTEXT}("f_Ke.dat") \quad K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.657 \cdot 10^5 & -3.759 \cdot 10^5 & & \\ -3.759 \cdot 10^5 & 1.018 \cdot 10^6 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \text{READTEXT}("f_De.dat") \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 331.465 & -751.72 & & \\ -751.72 & 2.036 \cdot 10^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$n_k := \text{rows}(M) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}("MDOF.dat") \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2 \quad n_s := n_k - n_m = 8$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}("NPOS.dat") \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

Umstrukturieren der Steifigkeits-, Massen und Dämpfungsmatrix auf die Form:

A ... full DOF set

R ... residual (master) DOF's

L ... internal (slave) DOF's

$$S_{AA} = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} := \text{sortM}(K, mdof)$$

$$M_{AA} := \text{sortM}(M, mdof)$$

$$D_{AA} := \text{sortM}(D, mdof)$$

$$K_{RR} := \text{submatrix}(K_{AA}, 1, n_m, 1, n_m)$$

$$K_{LR} := \text{submatrix}(K_{AA}, n_m + 1, n_k, 1, n_m)$$

$$K_{RL} := \text{submatrix}(K_{AA}, 1, n_m, n_m + 1, n_k)$$

$$K_{LL} := \text{submatrix}(K_{AA}, n_m + 1, n_k, n_m + 1, n_k)$$

Slave Freiheitsgrade:

$$sdof := nslave(M, mdof)$$

$$sdof^T = [2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

Knotenliste nach Master - Slave Reihung:

$$N_g := stack(mdof, sdof)$$

$$N_g^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

Zur Reduktion des Gleichungssystems wird eine Transformationsmatrix T benötigt, mit der folgende Transformation durchgeführt wird:

$$U_A = \begin{bmatrix} U_R \\ U_L \end{bmatrix} = T_g \cdot [U_R]$$

Berechnen der Transformationsmatrix:

$$T_g = [B] = \begin{bmatrix} I \\ \phi_R \end{bmatrix}$$

$$\phi_R := -(\mathbf{K}_{LL})^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LR} \quad \mathbf{B} := stack(identity(n_m), \phi_R) \quad T_g := B$$

Transformieren der Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix:

$$\mathbf{K}_g := T_g^T \cdot \mathbf{K}_{AA} \cdot T_g = \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.888 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_g := T_g^T \cdot \mathbf{M}_{AA} \cdot T_g = \begin{bmatrix} 0.086 & -0.097 \\ -0.097 & 0.398 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_g := T_g^T \cdot \mathbf{D}_{AA} \cdot T_g = \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 \\ -26.613 & 37.9 \end{bmatrix}$$

Das Rücksortieren der Zeilen der Transformationsmatrix auf die Reihenfolge der natürlichen Koordinaten vereinfacht in weiterer Folge die Operationen.

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad T_{o \sim}^{\widehat{N}_{g_i}} := T_g^{\widehat{i}}$$

S2) GUYAN Reduktion

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

$$\lambda := \text{genvals}(\mathbf{K}_g, \mathbf{M}_g) = \begin{bmatrix} 1.148 \cdot 10^5 \\ 2.052 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{bmatrix} 2.052 \cdot 10^3 \\ 1.148 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{bmatrix} 45.3 \\ 338.81 \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{Hz}{2 \pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{bmatrix} 7.21 \\ 53.924 \end{bmatrix} Hz$$

$$i := 1, 2 \dots n_m \quad k := 1, 2 \dots n_m$$

$$\mathbf{V}_g^{(i)} := \text{eigenvec}\left(\left(\mathbf{M}_g^{(-1)} \cdot \mathbf{K}_g\right), \lambda_i\right) \quad \mathbf{V}_g = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.997 \\ 0.587 & -0.081 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} := \mathbf{T}_o \cdot \mathbf{V}_g \quad i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_m$$

Überprüfung der Normierung der Eigenvektoren

$$n_{A_{1,k}} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (\mathbf{V}_{i,k})^2}} \quad \mathbf{V}_{i,k} := n_{A_{1,k}} \cdot \mathbf{V}_{i,k} \quad n_A = [0.712 \quad 0.678]$$

Berechnen der Spannungstransformationsmatrix:

$$\mathbf{T}_{\sigma o} := \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \frac{N}{m^3} \cdot \mathbf{T}_o$$

$$\mathbf{T}_{\sigma o} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.844 & -13.535 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \frac{N}{mm^3}$$

Export der Matrizen in Dateien:

$$EXP_M := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Me.dat"}, M_g) \quad EXP_T := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Te.dat"}, T_g)$$

$$EXP_K := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Ke.dat"}, K_g) \quad EXP_T := \text{WRITETEXT}(\text{"g_To.dat"}, T_o)$$

$$EXP_D := \text{WRITETEXT}(\text{"g_De.dat"}, D_g) \quad EXP_N := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Ne.dat"}, N_g)$$

Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Dateien:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}(\text{"g_f0e.dat"}, f_0 \cdot \frac{1}{Hz})$$

$$EXP_v := \text{WRITETEXT}(\text{"g_V0e.dat"}, V)$$

Export der Spannungstransformationsmatrix:

$$EXP_S := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Ts.dat"}, T_{\sigma o} \cdot \frac{mm^3}{N})$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil S3

Eigenwertanalyse des Bauteils "Kragträger" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Erstellen von "Superelementen" zur späteren Verwendung im Kontext eines Gesamtmodells.

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
 S1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> S1_DIREKT.mcdx
 S2) Guyan Reduktion (Statische Kondensation) --> S2_GUYAN.mcdx

S3) CMS Reduktion (Component Mode Synthesis)

- a) Aufstellung der Systemmatrizen
 b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
 c) grafische Darstellung der Eigenvektoren

S3) CMS Reduktion

- a) Aufstellen der Systemmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Datei:

$DATA := \text{READTEXT}(\text{"DATA.dat"})$

Durchmesser:	$d_s := DATA_2 \cdot m$	$d_s = 0.01 \text{ m}$
Länge:	$l_s := DATA_3 \cdot m$	$l_s = 1 \text{ m}$
Elastizitätsmodul:	$E_s := DATA_4 \cdot MPa$	$E_s = (2.1 \cdot 10^5) \text{ MPa}$
Dichte:	$\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$	$\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$
Masse Stab:	$m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \text{ kg}$	
Flächenträgheitsmoment:	$I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \text{ mm}^4$	
Raleigh-Dämpfung:	$\alpha := DATA_6$	$\alpha = 0.375$
	$\beta := DATA_7$	$\beta = 0.002$
Anzahl CMS-Moden:	$n_q := DATA_8$	$n_q = 8$

Import der Matrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M := \text{READTEXT}(\text{"f_Me.dat"}) \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.031 & 0 & & \\ 0 & 0.062 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K := \text{READTEXT}(\text{"f_Ke.dat"}) \quad K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.657 \cdot 10^5 & -3.759 \cdot 10^5 & & \\ -3.759 \cdot 10^5 & 1.018 \cdot 10^6 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \text{READTEXT}(\text{"f_De.dat"}) \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 331.465 & -751.72 & & \\ -751.72 & 2.036 \cdot 10^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$n_k := \text{rows}(M) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}(\text{"MDOF.dat"}) \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2$$

$$n_s := n_k - n_m = 8$$

$$n_r := n_m + n_q = 10$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}(\text{"NPOS.dat"}) \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

Umstrukturieren der Steifigkeits-, Massen und Dämpfungsmatrix auf die Form:

A ... full DOF set

R ... residual (master) DOF's

L ... internal (slave) DOF's

$$S_{AA} = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix}$$

$$K_{AA} := \text{sortM}(K, mdof)$$

$$M_{AA} := \text{sortM}(M, mdof)$$

$$D_{AA} := \text{sortM}(D, mdof)$$

$$K_{RR} := \text{submatrix}(K_{AA}, 1, n_m, 1, n_m)$$

$$K_{LR} := \text{submatrix}(K_{AA}, n_m + 1, n_k, 1, n_m)$$

$$K_{RL} := \text{submatrix}(K_{AA}, 1, n_m, n_m + 1, n_k)$$

$$K_{LL} := \text{submatrix}(K_{AA}, n_m + 1, n_k, n_m + 1, n_k)$$

$$M_{RR} := \text{submatrix}(M_{AA}, 1, n_m, 1, n_m)$$

$$M_{LR} := \text{submatrix}(M_{AA}, n_m + 1, n_k, 1, n_m)$$

$$M_{RL} := \text{submatrix}(M_{AA}, 1, n_m, n_m + 1, n_k)$$

$$M_{LL} := \text{submatrix}(M_{AA}, n_m + 1, n_k, n_m + 1, n_k)$$

Slave Freiheitsgrade:

$$s dof := nslave(M, mdof)$$

$$s dof^T = [2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

Knotenliste nach Master - Slave Reihung:

$$N_c := \text{stack}(mdof, s dof)$$

$$N_c^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

Zur Reduktion des Gleichungssystems werden zusätzlich modale Koordinaten q_m eingeführt. Es wird eine Transformationsmatrix T benötigt, mit der folgende Transformation durchgeführt wird:

$$U_A = \begin{bmatrix} U_R \\ U_L \end{bmatrix} = T_c \cdot \begin{bmatrix} U_R \\ q_m \end{bmatrix}$$

Berechnen der Transformationsmatrix:

$$T_c = [B \ \Phi] = \begin{bmatrix} I & O \\ \Phi_R & \Phi_L \end{bmatrix}$$

Interface Modes (Boundary Node Functions):

$$\Phi_R := -(K_{LL})^{-1} \cdot K_{LR}$$

$$B := \text{stack}(\text{identity}(n_m), \Phi_R)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0.453 & 0.564 \\ 4 & -0.287 & 1.208 \\ \vdots & & \\ 10 & & \end{bmatrix}$$

Fixed Base Mode Shapes (Constraint Modes):

Anzahl der modalen Koordinaten:

$$n_q = 8$$

$$\lambda_L := \text{genvals}(K_{LL}, M_{LL})$$

$$\lambda_L := \text{sort}(\lambda_L)$$

$$\lambda_L = \begin{bmatrix} 1 & 1.618 \cdot 10^5 \\ 2 & 1.269 \cdot 10^6 \\ 3 & 4.872 \cdot 10^6 \\ 4 & 1.194 \cdot 10^7 \\ 5 & 1.799 \cdot 10^7 \\ \vdots & \\ 8 & \end{bmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Submatrix LL: $i := 1, 2 \dots n_s$

$$\mathbf{V}_{LL}^{(i)} := \text{eigenvec} \left(\mathbf{M}_{LL}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LL}, \lambda_{L_i} \right) \quad \mathbf{V}_{LL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \dots & \infty \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.039 & -0.096 & & \\ 0.159 & 0.324 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Massennormierung auf m_{norm} :

$$m_{norm} := 1 \quad \mathbf{c}_i := \sqrt{\frac{m_{norm}}{(\mathbf{V}_{LL}^{(i)})^T \cdot \mathbf{M}_{LL} \cdot \mathbf{V}_{LL}^{(i)}}} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4.027 \\ 4.027 \\ 4.027 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Modalmatrix L: $i := 1, 2 \dots n_q$

$$\Phi_L^{(i)} := \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{V}_{LL}^{(i)} \quad \Phi_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \dots & \infty \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.156 & -0.386 & & \\ 0.642 & 1.305 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Nullmatrix: $i := 1, 2 \dots n_m \quad k := 1, 2 \dots n_q$

$$\mathbf{O}_{i,k} := 0 \quad \Phi = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \dots & \infty \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -0.156 & -0.386 & -0.841 & & \\ 0.642 & 1.305 & 1.824 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Transformationsmatrix: $\mathbf{T}_c := \text{augment}(\mathbf{B}, \Phi)$

Die Bewegungsgleichung kann nun in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} M_{BB} & M_{Bm} \\ M_{mB} & M_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_R'' \\ q_m'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{BB} & 0 \\ 0 & D_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_R' \\ q_m' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{BB} & 0 \\ 0 & K_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_R \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_R + \phi_R^T \cdot F_L \\ \phi_L^T \cdot F_L \end{bmatrix}$$

$$M_c \cdot U_c'' + D_c \cdot U_c' + K_c \cdot U_c = F_c$$

Bilden der generalisierten Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix:

$$i := 1, 2 \dots n_m \quad k := 1, 2 \dots n_q$$

$$\mathbf{K}_{BB} := \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_{AA} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{K}_{Bm_{i,k}} := 0$$

$$\mathbf{K}_{mB_{k,i}} := 0 \quad \mathbf{K}_{mm} := \Phi^T \cdot \mathbf{K}_{AA} \cdot \Phi$$

$$\mathbf{K}_c := \text{augment}(\text{stack}(\mathbf{K}_{BB}, \mathbf{K}_{mB}), \text{stack}(\mathbf{K}_{Bm}, \mathbf{K}_{mm}))$$

$$M_{BB} := B^T \cdot M_{AA} \cdot B \quad M_{Bm} := B^T \cdot M_{AA} \cdot \Phi$$

$$M_{mB} := \Phi^T \cdot M_{AA} \cdot B \quad M_{mm} := \Phi^T \cdot M_{AA} \cdot \Phi$$

$$M_c := \text{augment}(\text{stack}(M_{BB}, M_{mB}), \text{stack}(M_{Bm}, M_{mm}))$$

$$D_{BB} := B^T \cdot D_{AA} \cdot B \quad D_{Bm} := B^T \cdot D_{AA} \cdot \Phi$$

$$D_{mB} := \Phi^T \cdot D_{AA} \cdot B \quad D_{mm} := \Phi^T \cdot D_{AA} \cdot \Phi$$

$$D_c := \text{augment}(\text{stack}(D_{BB}, D_{mB}), \text{stack}(D_{Bm}, D_{mm}))$$

Das Rücksortieren der Zeilen der Transformationsmatrix auf die Reihenfolge der natürlichen Koordinaten vereinfacht in weiterer Folge die Operationen.

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad T_o \sim := T_c \widehat{N_{c_i}} \widehat{i}$$

S3) CMS Reduktion

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

$$\lambda := \text{genvals}(K_c, M_c) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.44 \cdot 10^7 \\ 5.923 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2.048 \cdot 10^3 \\ 7.866 \cdot 10^4 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 45.26 \\ 280.46 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{Hz}{2\pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.203 \\ 44.636 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} Hz$$

$$i := 1, 2 \dots n_r \quad k := 1, 2 \dots n_r$$

$$V_c^{(i)} := \text{eigenvec}((M_c^{(-1)} \cdot K_c), \lambda_i) \quad V_c = \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.81 & -0.985 & & \\ 0.587 & -0.051 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$V := T_o \cdot V_c$$

$$n_{A_{1,k}} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (V_{i,k})^2}} \quad V_{i,k} := n_{A_{1,k}} \cdot V_{i,k} \quad n_A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.711 & 0.573 & 0.679 & 0.751 & \dots & \end{bmatrix}$$

Berechnen der Spannungstransformationsmatrix:

$$\mathbf{T}_{\sigma\sigma} := \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \frac{N}{m^3} \cdot \mathbf{T}_o$$

$$\mathbf{T}_{\sigma\sigma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 9.844 & -13.535 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{N}{mm^3}$$

Export der Matrizen in Dateien:

$$EXP_M := \text{WRITETEXT}("c_Me.dat", \mathbf{M}_c) \quad EXP_T := \text{WRITETEXT}("c_Te.dat", \mathbf{T}_c)$$

$$EXP_K := \text{WRITETEXT}("c_Ke.dat", \mathbf{K}_c) \quad EXP_T := \text{WRITETEXT}("c_To.dat", \mathbf{T}_o)$$

$$EXP_D := \text{WRITETEXT}("c_De.dat", \mathbf{D}_c) \quad EXP_N := \text{WRITETEXT}("c_Ne.dat", N_c)$$

Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Dateien:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}\left("c_f0e.dat", f_0 \cdot \frac{1}{Hz}\right)$$

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}("c_V0e.dat", \mathbf{V})$$

Export der Spannungstransformationsmatrix:

$$EXP_S := \text{WRITETEXT}\left("c_Ts.dat", \mathbf{T}_{\sigma\sigma} \cdot \frac{mm^3}{N}\right)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil A1

Eigenwertanalyse des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

00) Beschreibung der Aufgabenstellung

--> 00_Intro.mcdx

A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- a) Aufstellung der Systemmatrizen
- b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
- c) grafische Darstellung der Eigenvektoren

A2) GUYAN reduziertes Superelement

--> A2_GUYAN.mcdx

A3) CMS reduziertes Superelement

--> A3_CMS.mcdx

A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- a) Aufstellen der Systemmatrizen - Erweitern der Bauteilmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Datei:

DATA := READTEXT("DATA.dat")

Anzahl der Knoten:	$n_k := DATA_1$	$n_k = 10$
Durchmesser:	$d_s := DATA_2 \cdot m$	$d_s = 0.01 \text{ m}$
Länge:	$l_s := DATA_3 \cdot m$	$l_s = 1 \text{ m}$
Elastizitätsmodul:	$E_s := DATA_4 \cdot MPa$	$E_s = (2.1 \cdot 10^5) \text{ MPa}$
Dichte:	$\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$	$\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$
Masse Stab:	$m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \text{ kg}$	
Flächenträgheitsmoment:	$I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \text{ mm}^4$	
Raleigh-Dämpfung:	$\alpha := DATA_6$	$\alpha = 0.375$
	$\beta := DATA_7$	$\beta = 0.002$

Kenndaten der Anbindungselemente:

$$\text{Steifigkeit Lager:} \quad k_b := \text{DATA}_9 \cdot \frac{N}{m} \quad k_b = 100 \frac{N}{mm}$$

$$\text{viskose Dämpfung Lager:} \quad d_b := \text{DATA}_{10} \cdot \frac{N \cdot s}{m} \quad d_b = 1 \frac{N \cdot s}{m}$$

$$\text{Zusatzmasse Balkenende:} \quad m_b := \text{DATA}_{11} \cdot kg \quad m_b = 2 \text{ kg}$$

Import der Matrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M := \text{READTEXT}("f_Me.dat") \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.031 & 0 & & \\ 0 & 0.062 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K := \text{READTEXT}("f_Ke.dat") \quad K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.657 \cdot 10^5 & -3.759 \cdot 10^5 & & \\ -3.759 \cdot 10^5 & 1.018 \cdot 10^6 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \text{READTEXT}("f_De.dat") \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 331.465 & -751.72 & & \\ -751.72 & 2.036 \cdot 10^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$n_k := \text{rows}(M) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}("MDOF.dat") \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2$$

$$n_s := n_k - n_m = 8$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}("NPOS.dat")$$

$$y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

$$\lambda := \text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.434 \cdot 10^7 \\ 5.895 \cdot 10^7 \\ 4.018 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3.952 \cdot 10^3 \\ 1.184 \cdot 10^5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 62.86 \\ 344.14 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{\text{Hz}}{2\pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 10.005 \\ 54.771 \\ 135.677 \\ 233.531 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

$$\mathbf{V}^{(i)} := \text{eigenvec}(\left(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K}\right), \lambda_i) \quad \mathbf{V} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{-0.781} & \overset{2}{-0.017} & \dots & \overset{10}{\ddots} \\ \overset{1}{-0.403} & \overset{2}{-0.059} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Überprüfung der Normierung der Eigenvektoren

$$n_{A_{1,k}} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (\mathbf{V}_{i,k})^2}} \quad \mathbf{V}_{i,k} := n_{A_{1,k}} \cdot \mathbf{V}_{i,k} \quad n_A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 10 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & \end{matrix}$$

A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

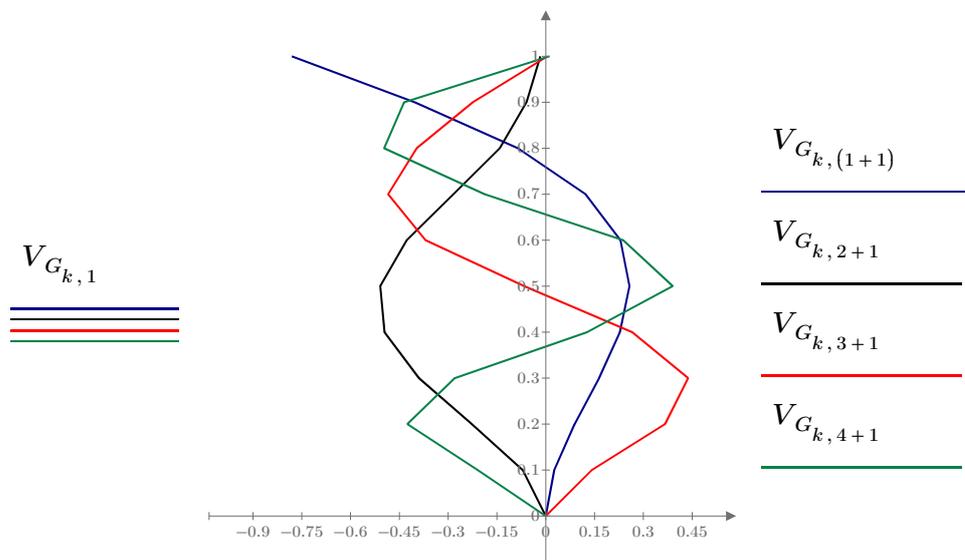
c) grafische Darstellung der Eigenvektoren

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k + 1$$

$$V_{G_{i,1}} := \frac{y_i \cdot m}{l_s} \quad V_G^{(i+1)} := \mathbf{V}^{(i)} \quad V_{G_{n_k+1,1}} := 0 \quad V_{G_{n_k+1,i+1}} := 0$$

$$V_G = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 11 \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{1} & \overset{2}{-0.781} & \overset{3}{-0.017} & \overset{4}{0.005} & \dots & \overset{11}{\ddots} \\ \overset{1}{0.9} & \overset{2}{-0.403} & \overset{3}{-0.059} & \overset{4}{-0.224} & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \end{bmatrix} \quad f_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 54.8 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

grafische Darstellung der ersten vier Eigenvektoren

Export der Matrizen in Dateien:

$$EXP_M := \text{WRITETEXT}(\text{"f_Ma.dat"}, M)$$

$$EXP_K := \text{WRITETEXT}(\text{"f_Ka.dat"}, K)$$

$$EXP_D := \text{WRITETEXT}(\text{"f_Da.dat"}, D)$$
Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Datei:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}\left(\text{"f_f0a.dat"}, f_0 \cdot \frac{1}{Hz}\right)$$

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}(\text{"f_V0a.dat"}, V)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil A2

Eigenwertanalyse des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
- A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> A1_DIREKT.mcdx
- A2) GUYAN reduziertes Superelement
- a) Aufstellung der Systemmatrizen
 - b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
 - c) grafische Darstellung der Eigenvektoren
- A3) CMS reduziertes Superelement --> A3_CMS.mcdx

A2) GUYAN Reduktion

- a) Aufstellen der Systemmatrizen - Erweitern der Bauteilmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Datei:

DATA := READTEXT("DATA.dat")

Anzahl der Knoten:	$n_k := DATA_1$	$n_k = 10$
Durchmesser:	$d_s := DATA_2 \cdot m$	$d_s = 0.01 \ m$
Länge:	$l_s := DATA_3 \cdot m$	$l_s = 1 \ m$
Elastizitätsmodul:	$E_s := DATA_4 \cdot MPa$	$E_s = (2.1 \cdot 10^5) \ MPa$
Dichte:	$\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$	$\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$
Masse Stab:	$m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \ kg$	
Flächenträgheitsmoment:	$I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \ mm^4$	
Raleigh-Dämpfung:	$\alpha := DATA_6$	$\alpha = 0.375$
	$\beta := DATA_7$	$\beta = 0.002$

Kenndaten der Anbindungselemente:

$$\text{Steifigkeit Lager:} \quad k_b := DATA_9 \cdot \frac{N}{m} \quad k_b = 100 \frac{N}{mm}$$

$$\text{viskose Dämpfung Lager:} \quad d_b := DATA_{10} \cdot \frac{N \cdot s}{m} \quad d_b = 1 \frac{N \cdot s}{m}$$

$$\text{Zusatzmasse Balkenende:} \quad m_b := DATA_{11} \cdot kg \quad m_b = 2 \text{ kg}$$

Import der Superelementmatrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M_g := \text{READTEXT}("g_Me.dat") \quad M_g = \begin{bmatrix} 0.086 & -0.097 \\ -0.097 & 0.398 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K_g := \text{READTEXT}("g_Ke.dat") \quad K_g = \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.888 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D_g := \text{READTEXT}("g_De.dat") \quad D_g = \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 \\ -26.613 & 37.9 \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix:

$$T_o := \text{READTEXT}("g_To.dat") \quad T_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.453 & 0.564 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Knotenliste Substruktur:

$$N_g := \text{READTEXT}("g_Ne.dat") \quad N_g^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

$$n_k := \text{rows}(T_o) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$n_m := \text{cols}(T_o) = 2$$

$$mdof := \text{submatrix}(N_g, 1, n_m, 1, 1)$$

$$mdof^T = [1 \ 3] \quad n_s := n_k - n_m = 8$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}(\text{"NPOS.dat"}) \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

Zusammenbau der Gesamtsteifigkeits-, -massen- und -dämpfungsmatrix:

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

Feder zum Ground am mittleren Masterknoten:

$$K := K_g \quad K_{n_m, n_m} := K_{g_{n_m, n_m}} + k_b \cdot \frac{s^2}{kg} \quad K = \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.189 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Gesamtmassenmatrix:

Zusatzmasse am freien Ende:

$$M := M_g \quad M_{1,1} := M_{g_{1,1}} + m_b \cdot \frac{1}{kg} \quad M = \begin{bmatrix} 2.086 & -0.097 \\ -0.097 & 0.398 \end{bmatrix}$$

Gesamtdämpfungsmatrix:

Dämpfer zum Ground am mittleren Masterknoten:

$$D := D_g \quad D_{n_m, n_m} := D_{g_{n_m, n_m}} + d_b \cdot \frac{m}{N \cdot s} \quad D = \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 \\ -26.613 & 38.9 \end{bmatrix}$$

A2) GUYAN Reduktion

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

$$\lambda := \text{genvals}(K, M) = \begin{bmatrix} 2.995 \cdot 10^5 \\ 3.953 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{bmatrix} 3.953 \cdot 10^3 \\ 2.995 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{bmatrix} 62.87 \\ 547.25 \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{Hz}{2 \pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{bmatrix} 10.006 \\ 87.098 \end{bmatrix} Hz$$

$$i := 1, 2 \dots n_m \quad k := 1, 2 \dots n_m$$

$$V_g^{(i)} := \text{eigenvec}\left(\left(M^{(-1)} \cdot K\right), \lambda_i\right) \quad V_g = \begin{bmatrix} -0.994 & -0.026 \\ -0.109 & -1 \end{bmatrix}$$

Rücktransformation der Eigenvektoren auf die natürlichen Koordinaten:

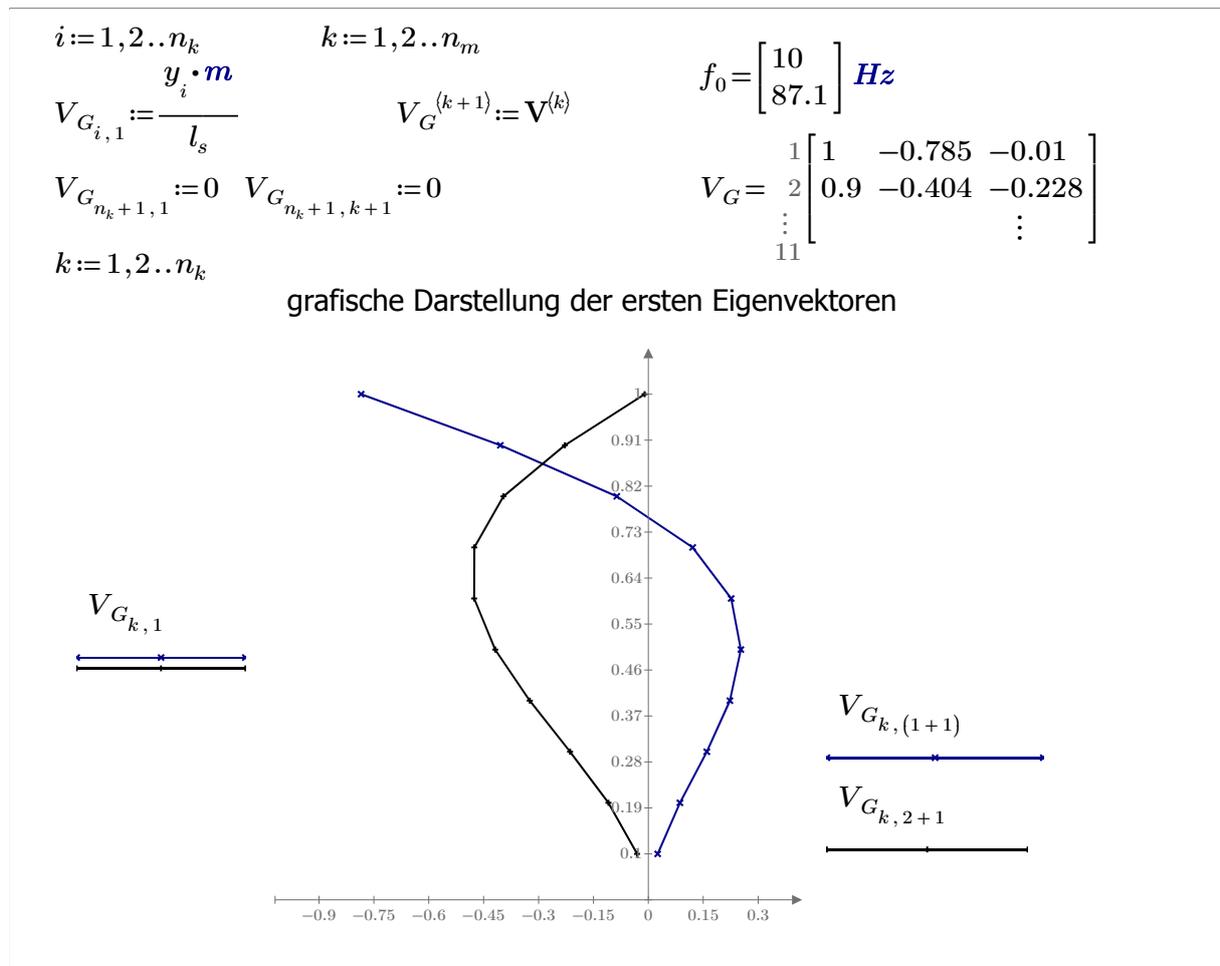
$$V := T_o \cdot V_g \quad i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_m$$

Überprüfung der Normierung der Eigenvektoren

$$n_{A_1, k} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (V_{i, k})^2}} \quad V_{i, k} := n_{A_1, k} \cdot V_{i, k} \quad n_A = [0.79 \quad 0.396]$$

A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

c) grafische Darstellung der Eigenvektoren



Export der Matrizen in Dateien:

$$EXP_M := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Ma.dat"}, M)$$

$$EXP_K := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Ka.dat"}, K)$$

$$EXP_D := \text{WRITETEXT}(\text{"g_Da.dat"}, D)$$

Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Datei:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT}(\text{"g_f0a.dat"}, f_0 \cdot \frac{1}{\text{Hz}})$$

$$EXP_V := \text{WRITETEXT}(\text{"g_V0a.dat"}, V)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil A3

Eigenwertanalyse des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
- A1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> A1_DIREKT.mcdx
- A2) GUYAN reduziertes Superelement
- A3) CMS reduziertes Superelement --> A3_CMS.mcdx
- Aufstellung der Systemmatrizen
 - Berechnung der Eigenwerte und -vektoren
 - grafische Darstellung der Eigenvektoren

A3) CMS Reduktion

- Aufstellen der Systemmatrizen - Erweitern der Bauteilmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Datei:

DATA := READTEXT("DATA.dat")

Anzahl der Knoten:	$n_k := DATA_1$	$n_k = 10$
Durchmesser:	$d_s := DATA_2 \cdot m$	$d_s = 0.01 \ m$
Länge:	$l_s := DATA_3 \cdot m$	$l_s = 1 \ m$
Elastizitätsmodul:	$E_s := DATA_4 \cdot MPa$	$E_s = (2.1 \cdot 10^5) \ MPa$
Dichte:	$\rho_s := DATA_5 \cdot \frac{kg}{m^3}$	$\rho_s = (7.85 \cdot 10^3) \frac{kg}{m^3}$
Masse Stab:	$m_s := \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \cdot l_s \cdot \rho_s = 0.617 \ kg$	
Flächenträgheitsmoment:	$I_s := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} = 490.874 \ mm^4$	
Raleigh-Dämpfung:	$\alpha := DATA_6$	$\alpha = 0.375$
	$\beta := DATA_7$	$\beta = 0.002$
Anzahl CMS-Moden:	$n_q := DATA_8$	$n_q = 8$

Kenndaten der Anbindungselemente:

$$\text{Steifigkeit Lager:} \quad k_b := \text{DATA}_9 \cdot \frac{N}{m} \quad k_b = 100 \frac{N}{mm}$$

$$\text{viskose Dämpfung Lager:} \quad d_b := \text{DATA}_{10} \cdot \frac{N \cdot s}{m} \quad d_b = 1 \frac{N \cdot s}{m}$$

$$\text{Zusatzmasse Balkenende:} \quad m_b := \text{DATA}_{11} \cdot kg \quad m_b = 2 \text{ kg}$$

Import der Superelementmatrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M_c := \text{READTEXT}(\text{"c_Me.dat"}) \quad M_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.086 & -0.097 & & \\ -0.097 & 0.398 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K_c := \text{READTEXT}(\text{"c_Ke.dat"}) \quad K_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 & & \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.888 \cdot 10^4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D_c := \text{READTEXT}(\text{"c_De.dat"}) \quad D_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 & & \\ -26.613 & 37.9 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Transformationsmatrix:

$$T_o := \text{READTEXT}(\text{"c_To.dat"}) \quad T_o = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0.453 & 0.564 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Knotenliste Substruktur:

$$N_c := \text{READTEXT}(\text{"c_Ne.dat"}) \quad N_c^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

$$n_k := \text{rows}(T_o) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}(\text{"MDOF.dat"}) \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2$$

$$n_s := n_k - n_m = 8$$

$$n_r := n_m + n_q = 10$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}(\text{"NPOS.dat"}) \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

Zusammenbau der Gesamtsteifigkeits-, -massen- und -dämpfungsmatrix:Gesamtsteifigkeitsmatrix:

Feder zum Ground am mittleren Masterknoten:

$$\mathbf{K} := \mathbf{K}_c \quad \mathbf{K}_{n_m, n_m} := \mathbf{K}_{c_{n_m, n_m}} + k_b \cdot \frac{s^2}{kg}$$

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \overset{1}{} & & \cdots & \overset{10}{} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & & & & \\ -1.329 \cdot 10^4 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Gesamtmassenmatrix:

Zusatzmasse am freien Ende:

$$\mathbf{M} := \mathbf{M}_c \quad \mathbf{M}_{1,1} := \mathbf{M}_{c_{1,1}} + m_b \cdot \frac{1}{kg}$$

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \overset{1}{} & & \overset{2}{} & \cdots & \overset{10}{} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2.086 & -0.097 & & & \\ -0.097 & 0.398 & & & \\ -0.2 & 0.48 & & & \\ & & & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Gesamtdämpfungsmatrix:

Dämpfer zum Ground am mittleren Masterknoten:

$$\mathbf{D} := \mathbf{D}_c \quad \mathbf{D}_{n_m, n_m} := \mathbf{D}_{c_{n_m, n_m}} + d_b \cdot \frac{m}{N \cdot s}$$

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & \overset{1}{} & & \overset{2}{} & \cdots & \overset{10}{} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 & & & \\ -26.613 & 38.9 & & & \\ -0.075 & 0.18 & & & \\ & & & & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

A3) CMS Reduktion

b) Berechnung der Eigenwerte und -vektoren

$$\lambda := \text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7.434 \cdot 10^7 \\ 5.895 \cdot 10^7 \\ 4.018 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \lambda := \text{sort}(\lambda) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3.952 \cdot 10^3 \\ 1.184 \cdot 10^5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sortierte Eigenwerte, -frequenzen und -vektoren mit Modalmatrix:

$$\omega_0 := \sqrt{\lambda} \quad \omega_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 62.86 \\ 344.14 \\ 852.48 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_0 := \frac{Hz}{2\pi} \cdot \omega_0 \quad f_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 10.005 \\ 54.771 \\ 135.677 \\ 233.531 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} Hz$$

$$i := 1, 2 \dots n_r \quad k := 1, 2 \dots n_r$$

$$\mathbf{V}_c^{(i)} := \text{eigenvec} \left((\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K}), \lambda_i \right)$$

$$\mathbf{V}_c = \begin{matrix} & \overset{1}{} & \overset{2}{} & \overset{3}{} & \cdots & \overset{10}{} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0.994 & -0.073 & 0.011 & & & \\ -0.109 & -0.624 & -0.826 & & & \\ 0.004 & -0.778 & 0.513 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Rücktransformation der Eigenvektoren auf Substruktur:

$$\mathbf{V} := \mathbf{T}_o \cdot \mathbf{V}_c$$

Überprüfung der Normierung der Eigenvektoren

$$n_{A_{1,k}} := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_k} (V_{i,k})^2}} \quad V_{i,k} := n_{A_{1,k}} \cdot V_{i,k} \quad n_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ 0.785 & 0.227 & \dots & \end{bmatrix}$$

A3) Berechnung mit reduzierten Matrizen - CMS Methode

c) grafische Darstellung der Eigenvektoren

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_r$$

$$V_{G_{i,1}} := \frac{y_i \cdot m}{l_s}$$

$$V_G^{(k+1)} := V^{(k)}$$

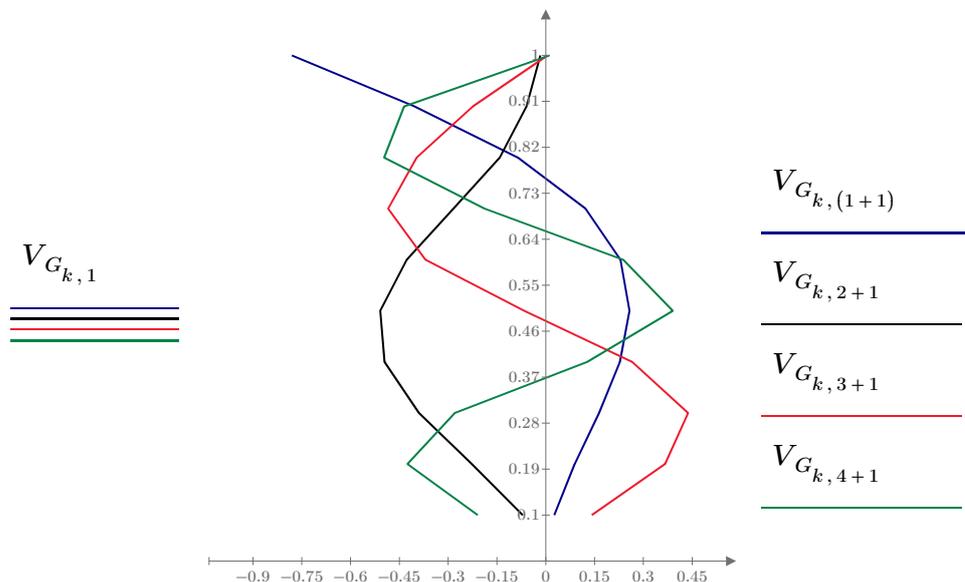
$$f_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 54.8 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

$$V_{G_{n_k+1,1}} := 0 \quad V_{G_{n_k+1,k+1}} := 0$$

$$V_G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 11 \\ 1 & -0.781 & & \\ 0.9 & -0.403 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 11 & & & \end{bmatrix}$$

$$k := 1, 2 \dots n_k$$

grafische Darstellung der ersten Eigenvektoren



Export der Matrizen in Dateien:

$EXP_M := \text{WRITETEXT}(\text{"c_Ma.dat"}, M)$

$EXP_K := \text{WRITETEXT}(\text{"c_Ka.dat"}, K)$

$EXP_D := \text{WRITETEXT}(\text{"c_Da.dat"}, D)$

Export der Eigenfrequenzen und -vektoren in Datei:

$$EXP_f := \text{WRITETEXT} \left(\text{"c_f0a.dat"}, f_0 \cdot \frac{1}{Hz} \right)$$

$$EXP_f := \text{WRITETEXT} \left(\text{"c_V0a.dat"}, \mathbf{V} \right)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil B1

Berechnung der freien Schwingung (Ausschwingverhalten mit Anfangsbedingungen) des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx

B1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- Aufstellung der Systemmatrizen
- Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen
- Berechnung des Spannungsverlaufs

B2) GUYAN reduziertes Superelement --> B2_GUYAN.mcdx

B3) CMS reduziertes Superelement --> B3_CMS.mcdx

B1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

- Aufstellen der Systemmatrizen

Import der Systemmatrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M := \text{READTEXT}("f_Ma.dat") \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2.031 & 0 & & \\ 0 & 0.062 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K := \text{READTEXT}("f_Ka.dat") \quad K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.657 \cdot 10^5 & -3.759 \cdot 10^5 & & \\ -3.759 \cdot 10^5 & 1.018 \cdot 10^6 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \text{READTEXT}("f_Da.dat") \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 331.465 & -751.72 & & \\ -751.72 & 2.036 \cdot 10^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$n_k := \text{rows}(M) = 10$$

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}("MDOF.dat") \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2$$

$$n_s := n_k - n_m = 8$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}("NPOS.dat") \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

B1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode

b) Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen

Die freie Schwingung erfolgt aus der statischen Ruhelage mit den Anfangsbedingungen:

$$x_0 := \text{READTEXT}("x0.dat")$$

$$x_0^T = [0.057 \ 0.049 \ 0.041 \ 0.034 \ 0.026 \ 0.019 \ 0.013 \ 0.008 \ \dots] \quad v_{0_i} := 0$$

Überführen des DGL-Systems 2. Ordnung in ein DGL-System 1. Ordnung:

Substitution der Ableitung durch Einführung neuer Variablen:

$$i := 1, 2 \dots n_k$$

$$k := 1, 2 \dots n_k$$

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2 \quad z_3 = \frac{d}{dt} x_1 \quad z_4 = \frac{d}{dt} x_2$$

Erweiterung des Gleichungssystems auf Größe $2n$ durch Bilden der Matrix A aus den Matrizen K, M, D und I :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K}) & -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{D}) \end{bmatrix}$$

$$A_{n_k+i, k} := -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K})_{i, k}$$

$$A_{n_k+i, n_k+k} := -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{D})_{i, k}$$

$$A_{i, n_k+i} := 1$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Das Gleichungssystem nimmt nun folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} z(t) = A \cdot z(t)$$

Mit der homogenen Lösung der linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung:

$$z(t) = V_A \cdot e^{\lambda_A \cdot t}$$

Die Lösung des DGL Systems lässt sich auch als Summe darstellen:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} \left(\mathbf{b}_i \cdot e^{(\lambda_{A_i} \cdot t)} \cdot V_A^{(i)} \right)$$

Berechnung der (komplexen) Eigenwerte der $(2n)$ Matrix:

$$i := 1, 2 \dots 2 \cdot n_k$$

$$\lambda_A := \text{eigenvals}(A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3.382 + 62.834j \\ -3.382 - 62.834j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\lambda_A := \text{sort}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1.48 \cdot 10^5 \\ -1.169 \cdot 10^5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Der Eigenkreisfrequenzen und Eigenfrequenzen:

$$\omega_A := \text{Im}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_A := \frac{\omega_A}{2 \cdot \pi} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

und der Eigenvektoren:

$$V_A^{(i)} := \text{eigenvec}(A, \lambda_{A_i}) \quad V_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -6.177 \cdot 10^{-9} & \dots & \dots \\ 7.975 \cdot 10^{-7} & & \\ & \ddots & \end{bmatrix}$$

Die Anfangswerte, zum Zeitpunkt $t=0$, werden im Vektor z_0 zusammengefasst. Damit lässt sich der Vektor b berechnen:

$$z_{0_i} := \begin{cases} x_{0_i} & \text{if } i \leq n_k \\ v_{0_{(i-n_k)}} & \text{else} \end{cases} \quad b := V_A^{(-1)} \cdot z_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.104 + 1.415j \cdot 10^{-14} \\ 0.23 - 6.334j \cdot 10^{-14} \\ -0.372 - 8.398j \cdot 10^{-15} \\ -0.455 - 7.55j \cdot 10^{-15} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

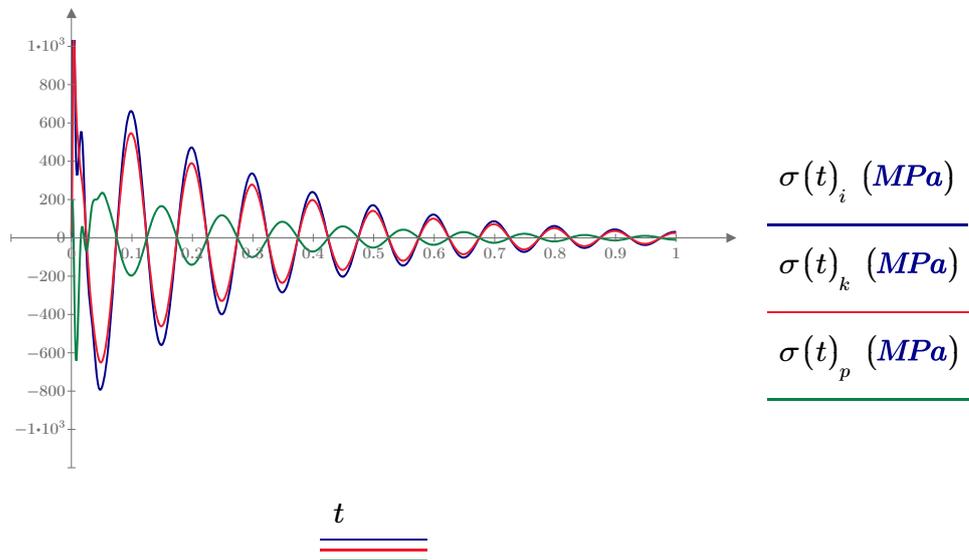
Nun lässt sich die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Zeit berechnen.

$$z(t) := \sum_{i=1}^{2 \cdot n_k} \left(b_i \cdot e^{(\lambda_{A_i} \cdot t)} \cdot V_A^{(i)} \right) \quad x(t) := \text{Re}(\text{submatrix}(z(t), 1, n_k, 1, \text{cols}(z(t)))) \cdot m$$

$$x(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.049 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} m \quad x(0.01) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4.144 \cdot 10^{-2} \\ 2.039 \cdot 10^{-2} \\ 9.336 \cdot 10^{-4} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} m \quad x(0.02) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.014 \\ 0.007 \\ 0.002 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} m$$

$t := 0, 0.001 \dots 1$ $i := 3$ $k := 4$ $p := 10$

Biegespannungsverlauf - direkte Methode



$tt := 1, 2 \dots 4000$ $i := 2, 3 \dots (n_k + 1)$

$$XX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad XX_{tt,i} := x(XX_{tt,1})_{i-1} \cdot \frac{1}{mm}$$

Export Verschiebungsverlauf:

$XX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("f_xb.dat", XX)$

$$SX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad SX_{tt,i} := \sigma(SX_{tt,1})_{i-1} \cdot \frac{1}{MPa}$$

Export Spannungsverlauf:

$SX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("f_sb.dat", SX)$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil B2

Berechnung der freien Schwingung (Ausschwingverhalten mit Anfangsbedingungen) des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
- B1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> B1_DIREKT.mcdx
- B2) GUYAN reduziertes Superelement
- a) Aufstellung der Systemmatrizen
 - b) Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen
 - c) Berechnung des Spannungsverlaufs
- B3) CMS reduziertes Superelement --> B3_CMS.mcdx

B2) GUYAN reduziertes Superelement

- a) Aufstellen der Systemmatrizen

Import der Systemmatrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$$M := \text{READTEXT}("g_Ma.dat") \quad M = \begin{bmatrix} 2.086 & -0.097 \\ -0.097 & 0.398 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$$K := \text{READTEXT}("g_Ka.dat") \quad K = \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.189 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$$D := \text{READTEXT}("g_Da.dat") \quad D = \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 \\ -26.613 & 38.9 \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix:

$$T_o := \text{READPRN}("g_To.dat") \quad T_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.453 & 0.564 \\ 0 & 1 \\ -0.287 & 1.208 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Knotenliste Substruktur:

$$N_g := \text{READTEXT}("g_Ne.dat") \quad N_g^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

$$n_k := \text{rows}(N_g) = 10 \quad i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}(\text{"MDOF.dat"}) \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2 \quad n_s := n_k - n_m = 8$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}(\text{"NPOS.dat"}) \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

B2) GUYAN reduziertes Superelement

b) Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen

Die freie Schwingung erfolgt aus der statischen Ruhelage mit den Anfangsbedingungen:

$$x_0 := \text{READTEXT}(\text{"x0.dat"})$$

$$x_0^T = [0.057 \ 0.049 \ 0.041 \ 0.034 \ 0.026 \ 0.019 \ 0.013 \ 0.008 \ \dots]$$

Transformieren auf die Masterknoten der Substruktur:

$$x_{0g} := \text{geninv}(T_o) \cdot x_0 \cdot m \quad x_{0g} = \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.041 \end{bmatrix} m \quad v_{0g_{n_m}} := 0 \cdot \frac{m}{s}$$

Überführen des DGL-Systems 2. Ordnung in ein DGL-System 1. Ordnung:

Substitution der Ableitung durch Einführung neuer Variablen:

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2 \quad z_3 = \frac{d}{dt} x_1 \quad z_4 = \frac{d}{dt} x_2$$

$$i := 1, 2 \dots n_m \\ k := 1, 2 \dots n_m$$

Erweiterung des Gleichungssystems auf Größe 2n durch Bilden der Matrix A aus den Matrizen K, M, D und I:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K}) & -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{D}) \end{bmatrix}$$

$$A_{n_m+i, k} := -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{K})_{i, k}$$

$$A_{n_m+i, n_m+k} := -(\mathbf{M}^{(-1)} \cdot \mathbf{D})_{i, k}$$

$$A_{i, n_m+i} := 1$$

$$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.121 \cdot 10^3 & -7.562 \cdot 10^3 & -6.253 & 8.322 \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

Das Gleichungssystem nimmt nun folgende Form an:

$$\frac{d}{dt}z(t) = A \cdot z(t)$$

Mit der homogenen Lösung der linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung:

$$z(t) = V_A \cdot e^{\lambda_A \cdot t}$$

Die Lösung des DGL Systems lässt sich auch als Summe darstellen:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} \left(\mathbf{b}_i \cdot e^{(\lambda_{A_i} \cdot t)} \cdot V_A^{(i)} \right)$$

Berechnung der (komplexen) Eigenwerte der (2n) Matrix:

$$i := 1, 2 \dots 2 \cdot n_m$$

$$\lambda_A := \text{eigenvals}(A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3.382 + 62.842j \\ -3.382 - 62.842j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\lambda_A := \text{sort}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -47.569 + 544.631j \\ -47.569 - 544.631j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Der Eigenkreisfrequenzen und Eigenfrequenzen:

$$\omega_A := \text{Im}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 544.631 \\ -544.631 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_A := \frac{\omega_A}{2 \cdot \pi} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 86.681 \\ -86.681 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

und der Eigenvektoren:

$$V_A^{(i)} := \text{eigenvec}(A, \lambda_{A_i}) \quad V_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -5.597 \cdot 10^{-5} + 8.764j \cdot 10^{-6} & \dots & \dots \\ -0.002 - 9.194j \cdot 10^{-4} & & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

Die Anfangswerte, zum Zeitpunkt t=0, werden im Vektor z_0 zusammengefasst. Damit lässt sich der Vektor b berechnen:

$$z_{0_i} := \begin{cases} x_{0g_i} \cdot \frac{1}{m} & \text{if } i \leq n_m \\ v_{0g(i-n_m)} \cdot \frac{s}{m} & \text{else} \end{cases} \quad \mathbf{b} := V_A^{(-1)} \cdot z_0 = \begin{bmatrix} -7.893 + 5.616j \\ -7.893 - 5.616j \\ 0.143 - 1.774j \\ 0.143 + 1.774j \end{bmatrix}$$

Nun lässt sich die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Zeit berechnen.

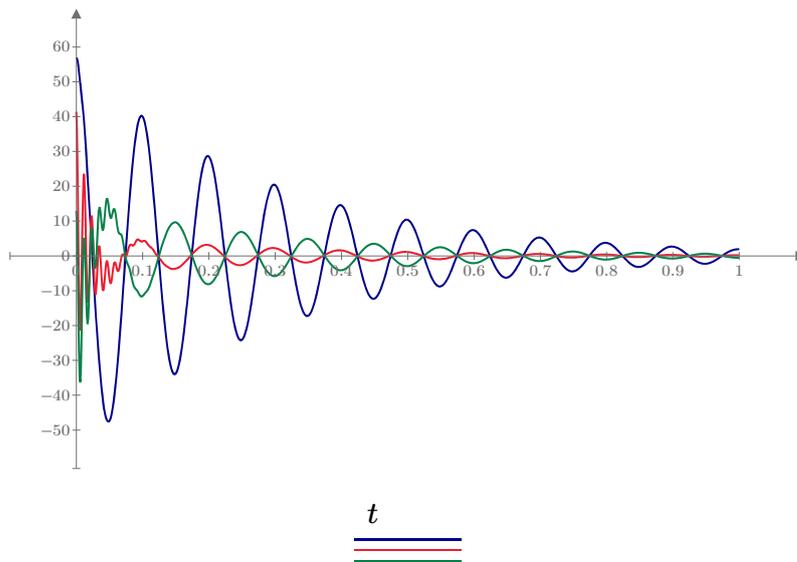
$$\mathbf{z}(t) := \sum_{i=1}^{2 \cdot n_m} \left(\mathbf{b}_i \cdot e^{(\lambda_{A_i} \cdot t)} \cdot \mathbf{V}_A^{(i)} \right) \quad x_g(t) := \text{Re} \left(\text{submatrix} \left(\mathbf{z}(t), 1, n_m, 1, \text{cols}(\mathbf{z}(t)) \right) \right) \cdot \mathbf{m}$$

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{T}_o \cdot x_g(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.049 \\ 0.041 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m} \quad \mathbf{x}(0.01) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4.214 \cdot 10^{-2} \\ 2.892 \cdot 10^{-2} \\ 1.741 \cdot 10^{-2} \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m} \quad \mathbf{x}(0.02) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.013 \\ 0.005 \\ -0.002 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

$$t := 0, 0.001 \dots 1 \quad k := 7$$

Verschiebungsverlauf - B2



$$\underline{x(t)_{\text{mdof}_1} \text{ (mm)}}$$

$$\underline{x(t)_{\text{mdof}_2} \text{ (mm)}}$$

$$\underline{x(t)_k \text{ (mm)}}$$

B2) GUYAN reduziertes Superelement

c) Berechnung des Spannungsverlaufs

Biegespannungen:

Knotenreihung entsprechend der Transformation

$$i := 1, 2 \dots n_k$$

$$k := 1, 2 \dots n_k$$

Import der Spannungstransformationsmatrix:

$$T_{\sigma o} := \text{READTEXT}(\text{"g_Ts.dat"})$$

$$T_{\sigma o} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.844 & -13.535 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Unter Verwendung der zeitabhängigen Verschiebungsvektoren werden die Spannungen σ , für den Biegebalken, berechnet:

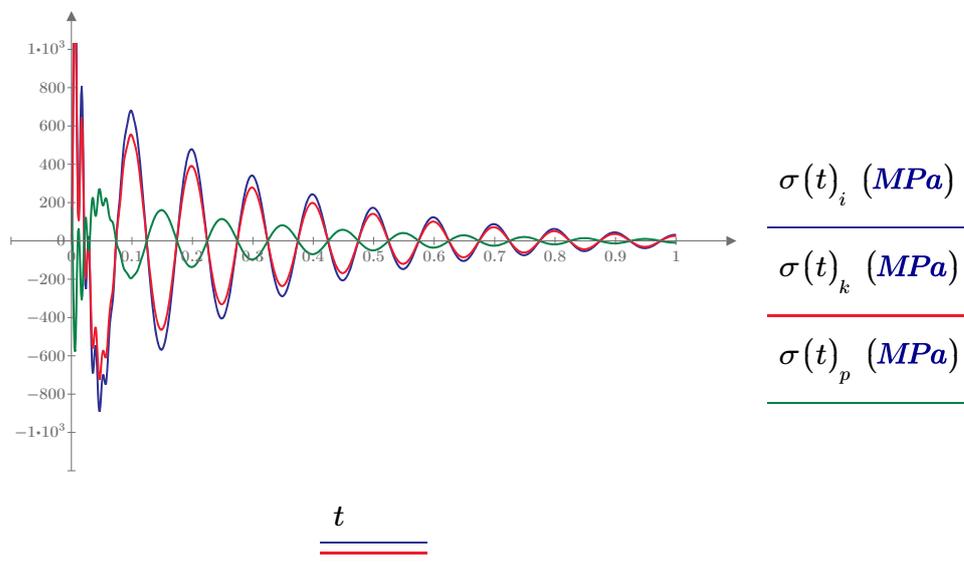
$$\sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \rho_{inv} \quad \sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \eta \cdot a^{-1} \cdot T_g \cdot x_g \quad \sigma = T_{\sigma g} \cdot x_g$$

$$\sigma(t) := T_{\sigma o} \cdot \frac{N}{mm^3} \cdot x_g(t) \quad \sigma(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$t := 0, 0.001 \dots 1$$

$$i := 3 \quad k := 4 \quad p := 10$$

Biegespannungsverlauf - GUYAN Reduktion



$$tt := 1, 2 \dots 4000 \quad i := 2, 3 \dots (n_m + 1)$$

Verlauf der generalisierten Koordinaten:

$$XG_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad XG_{tt,i} := x_g \left(XG_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{mm}$$

$$XG_{EXP} := \text{WRITETEXT}("g_xg.dat", XG)$$

$$i := 2, 3 \dots (n_k + 1)$$

Export Verschiebungsverlauf:

$$XX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad XX_{tt,i} := x \left(XX_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{mm}$$

$$XX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("g_xb.dat", XX)$$

Export Spannungsverlauf:

$$SX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad SX_{tt,i} := \sigma \left(SX_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{MPa}$$

$$SX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("g_sb.dat", SX)$$

Diskreter n-Massen Biegeschwinger - Teil B3

Berechnung der freien Schwingung (Ausschwingverhalten mit Anfangsbedingungen) des Gesamtsystems "Kragträger mit Zusatzmasse und Dämpfer" mit verschiedenen Ansätzen zur Reduktion des Gleichungssystems. Verwendung von zuvor erstellten "Superelementen".

- 00) Beschreibung der Aufgabenstellung --> 00_Intro.mcdx
- B1) Berechnung mit vollen Matrizen - direkte Methode --> B1_DIREKT.mcdx
- B2) GUYAN reduziertes Superelement --> B2_GUYAN.mcdx
- B3) CMS reduziertes Superelement**
- Aufstellung der Systemmatrizen
 - Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen
 - Berechnung des Spannungsverlaufs

B3) CMS reduziertes Superelement

- Aufstellen der Systemmatrizen

Import der allgemeinen Modelldaten aus Datei:

$DATA := \text{READTEXT}("DATA.dat")$

Anzahl CMS-Moden: $n_q := DATA_8$ $n_q = 8$

Import der Systemmatrizen aus Dateien:

Massenmatrix:

$M := \text{READTEXT}("c_Ma.dat")$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2.086 & -0.097 & & \\ -0.097 & 0.398 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Steifigkeitsmatrix:

$K := \text{READTEXT}("c_Ka.dat")$

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9.664 \cdot 10^3 & -1.329 \cdot 10^4 & & \\ -1.329 \cdot 10^4 & 1.189 \cdot 10^5 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dämpfungsmatrix:

$D := \text{READTEXT}("c_Da.dat")$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 19.36 & -26.613 & -0.075 & -0.025 & & \\ -26.613 & 38.9 & 0.18 & 0.078 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Transformationsmatrix:

$T_o := \text{READPRN}("c_To.dat")$

$$T_o = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0.453 & 0.564 & -0.156 & -0.386 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Knotenliste Substruktur:

$$N_c := \text{READTEXT}("c_Ne.dat") \quad N_c^T = [1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

$$n_k := \text{rows}(T_o) = 10 \quad i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Master Freiheitsgrade:

$$mdof := \text{READTEXT}("MDOF.dat") \quad mdof^T = [1 \ 3]$$

$$n_m := \text{rows}(mdof) = 2 \quad n_s := n_k - n_m = 8 \quad n_r := n_m + n_q = 10$$

Knotenpositionen:

$$y := \text{READTEXT}("NPOS.dat") \quad y^T = [1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

B2) CMS reduziertes Superelement

b) Berechnung der freien Schwingung mit Anfangsbedingungen

Die freie Schwingung erfolgt aus der statischen Ruhelage mit den Anfangsbedingungen:

$$x_0 := \text{READTEXT}("x0.dat")$$

$$x_0^T = [0.057 \ 0.049 \ 0.041 \ 0.034 \ 0.026 \ 0.019 \ 0.013 \ 0.008 \ \dots]$$

Transformieren auf die Masterknoten der Substruktur:

$$x_{0c} := \text{geninv}(T_o) \cdot x_0 \cdot m \quad x_{0c}^T = [0.057 \ 0.041 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] m \quad v_{0c_{n_r}} := 0 \cdot \frac{m}{s}$$

Überführen des DGL-Systems 2. Ordnung in ein DGL-System 1. Ordnung:Substitution der Ableitung durch Einführung neuer Variablen: $i := 1, 2 \dots (n_r)$

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2 \quad z_3 = \frac{d}{dt} x_1 \quad z_4 = \frac{d}{dt} x_2 \quad k := 1, 2 \dots (n_r)$$

Erweiterung des Gleichungssystems auf Größe $2n$ durch Bilden der Matrix A aus den Matrizen K, M, D und I:

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ -(M^{(-1)} \cdot K) & -(M^{(-1)} \cdot D) \end{bmatrix}$$

$$A_{n_r+i, k} := -(M^{(-1)} \cdot K)_{i, k}$$

$$A_{n_r+i, n_r+k} := -(M^{(-1)} \cdot D)_{i, k}$$

$$A_{i, n_r+i} := 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Das Gleichungssystem nimmt nun folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathbf{A} \cdot z(t)$$

Mit der homogenen Lösung der linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung:

$$z(t) = \mathbf{V}_A \cdot e^{\lambda_A \cdot t}$$

Die Lösung des DGL Systems lässt sich auch als Summe darstellen:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} \left(\mathbf{b}_i \cdot e^{(\lambda_{A_i} \cdot t)} \cdot \mathbf{V}_A^{(i)} \right)$$

Berechnung der (komplexen) Eigenwerte der (2n) Matrix:

$$i := 1, 2 \dots 2 \cdot n_r$$

$$\lambda_A := \text{eigenvals}(\mathbf{A}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3.382 + 62.834j \\ -3.382 - 62.834j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\lambda_A := \text{sort}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1.48 \cdot 10^5 \\ -1.169 \cdot 10^5 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Der Eigenkreisfrequenzen und Eigenfrequenzen:

$$\omega_A := \text{Im}(\lambda_A) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f_A := \frac{\omega_A}{2 \cdot \pi} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

und der Eigenvektoren:

$$\mathbf{V}_A^{(i)} := \text{eigenvec}(\mathbf{A}, \lambda_{A_i}) \quad \mathbf{V}_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.691 \cdot 10^{-8} & & \dots & \\ 4.193 \cdot 10^{-6} & & & \\ & & & \ddots \\ & & & \dots & \end{bmatrix}$$

Die Anfangswerte, zum Zeitpunkt t=0, werden im Vektor z_0 zusammengefasst. Damit lässt sich der Vektor b berechnen:

$$z_{0_i} := \begin{cases} \text{if } i \leq n_r \\ x_{0c_i} \cdot \frac{1}{m} \\ \text{else} \\ v_{0c(i-n_r)} \cdot \frac{s}{m} \end{cases} \quad \mathbf{b} := \mathbf{V}_A^{(-1)} \cdot \mathbf{z}_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 20 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0.038 - 2.701j \cdot 10^{-16} \\ -0.122 + 1.096j \cdot 10^{-15} \\ -0.212 - 5.577j \cdot 10^{-15} \\ -0.202 - 1.95j \cdot 10^{-15} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Nun lässt sich die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Zeit berechnen.

$$\mathbf{z}(t) := \sum_{i=1}^{2 \cdot n_r} \left(\mathbf{b}_i \cdot e^{(\lambda_i \cdot t)} \cdot \mathbf{V}_A^{(i)} \right) \quad x_c(t) := \text{Re}(\text{submatrix}(\mathbf{z}(t), 1, n_r, 1, \text{cols}(\mathbf{z}(t)))) \cdot \mathbf{m}$$

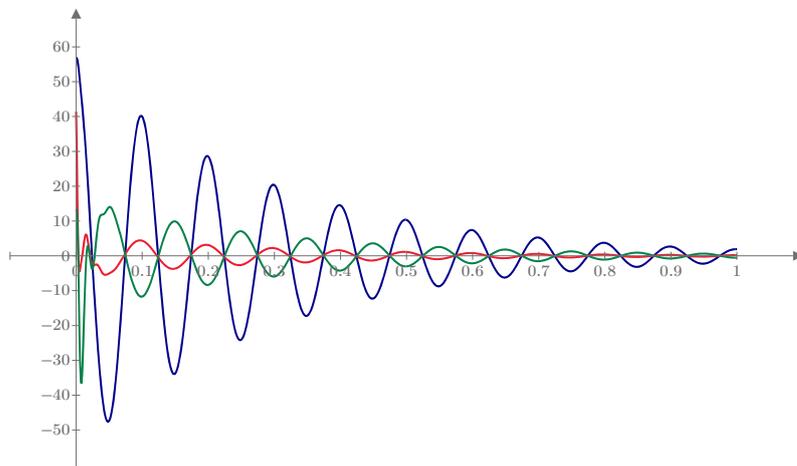
$$x(t) := \mathbf{T}_o \cdot x_c(t)$$

$$x(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.057 \\ 0.049 \\ 0.041 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m} \quad x(0.01) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4.144 \cdot 10^{-2} \\ 2.039 \cdot 10^{-2} \\ 9.336 \cdot 10^{-4} \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m} \quad x(0.02) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.014 \\ 0.007 \\ 0.002 \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

t := 0, 0.001 .. 1

k := 7

Verschiebungsverlauf - B3



t

$x(t)_{mdof_1}$ (mm)
 $x(t)_{mdof_2}$ (mm)
 $x(t)_k$ (mm)

B3) CMS reduziertes Superelement

c) Berechnung des Spannungsverlaufs

Biegespannungen:
Knotenreihung entsprechend der Transformation

$$i := 1, 2 \dots n_k \quad k := 1, 2 \dots n_k$$

Import der Spannungstransformationsmatrix:

$$T_{\sigma o} := \text{READTEXT}("c_Ts.dat")$$

$$T_{\sigma o} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 9.844 & -13.535 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

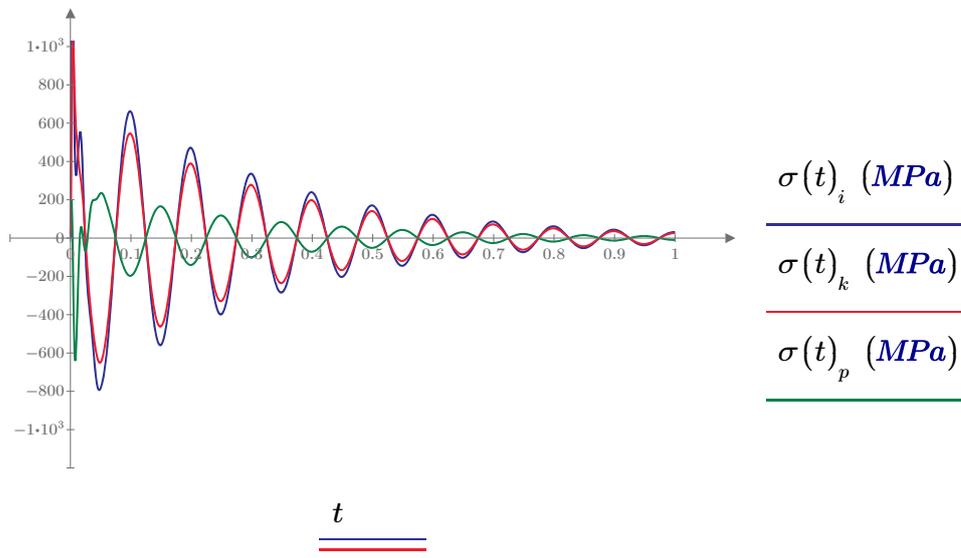
Unter Verwendung der zeitabhängigen Verschiebungsvektoren werden die Spannungen σ , für den Biegebalken, berechnet:

$$\sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \rho_{inv} \quad \sigma = \frac{E_s \cdot d_s}{2} \cdot \eta \cdot a^{-1} \cdot T_o \cdot x_c \quad \sigma = T_{\sigma o} \cdot x_c$$

$$\sigma(t) := T_{\sigma o} \cdot \frac{N}{mm^3} \cdot x_c(t) \quad \sigma(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \end{bmatrix} MPa$$

$$t := 0, 0.001 \dots 1 \quad i := 3 \quad k := 4 \quad p := 10$$

Biegespannungsverlauf - CMS Reduktion



$$tt := 1, 2 \dots 4000 \quad i := 2, 3 \dots (n_r + 1)$$

Verlauf der generalisierten Koordinaten:

$$XG_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad XG_{tt,i} := x_c \left(XG_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{mm}$$

$$XG_{EXP} := \text{WRITETEXT}("c_xg.dat", XG)$$

$$i := 2, 3 \dots (n_k + 1)$$

Verschiebungen natürlichen Koordinaten:

$$XX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad XX_{tt,i} := x \left(XX_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{mm}$$

Export Verschiebungsverlauf:

$$XX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("c_xb.dat", XX)$$

Spannungen in der Reihung der natürlichen Koordinaten:

$$SX_{tt,1} := \frac{tt}{2000} \quad SX_{tt,i} := \sigma \left(SX_{tt,1} \right)_{i-1} \cdot \frac{1}{MPa}$$

Export Spannungsverlauf:

$$SX_{EXP} := \text{WRITETEXT}("c_sb.dat", SX)$$

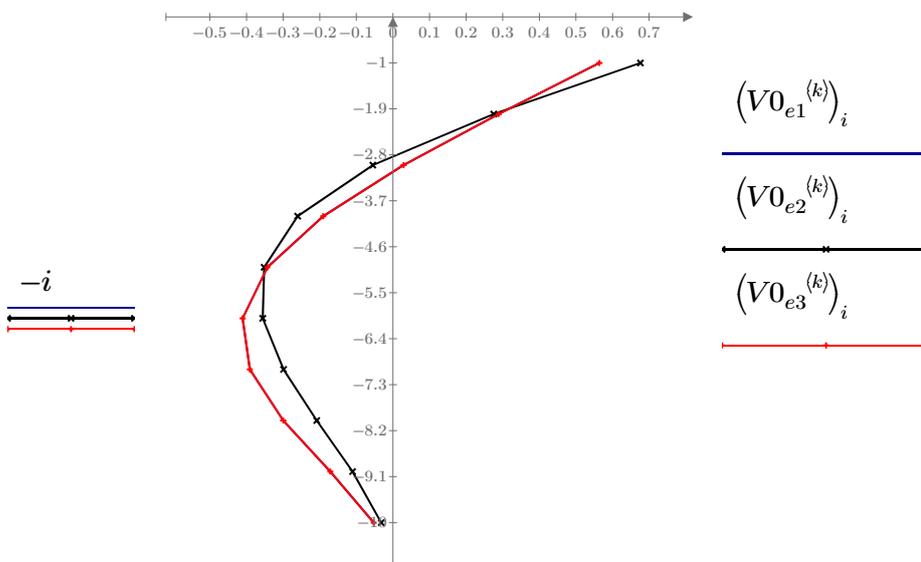
Diskreter n-Massen Biegeschwinger Vergleich der Ergebnisse

Vergleich der Eigenfrequenzen und der Eigenvektoren des Biegebalkens als Einzelteil

```

f0e(1) := READTEXT("f_f0e.dat")      V0e1 := READTEXT("f_V0e.dat")
f0e(2) := READTEXT("g_f0e.dat")      V0e2 := READPRN("g_V0e.dat")
f0e(3) := READTEXT("c_f0e.dat")      V0e3 := -1 READTEXT("c_V0e.dat")

i := 1, 2 .. 10      k := 2
    
```

$$f_{0e} = \begin{bmatrix} 7.203 & 7.21 & 7.203 \\ 44.636 & 53.924 & 44.636 \\ 123.732 & 0 & 123.732 \\ 239.939 & 0 & 239.939 \\ 392.226 & 0 & 392.226 \\ 578.01 & 0 & 578.01 \\ 791.155 & 0 & 791.155 \\ 1016.738 & 0 & 1016.738 \\ 1224.83 & 0 & 1224.83 \\ 1372.804 & 0 & 1372.804 \end{bmatrix}$$


Vergleich der Eigenfrequenzen und der Eigenvektoren des Gesamtmodells

$f_{0a}^{(1)} := \text{READTEXT}("f_f0a.dat")$

$V0_{a1} := \text{READTEXT}("f_V0a.dat")$

$f_{0a}^{(2)} := \text{READTEXT}("g_f0a.dat")$

$V0_{a2} := \text{READTEXT}("g_V0a.dat")$

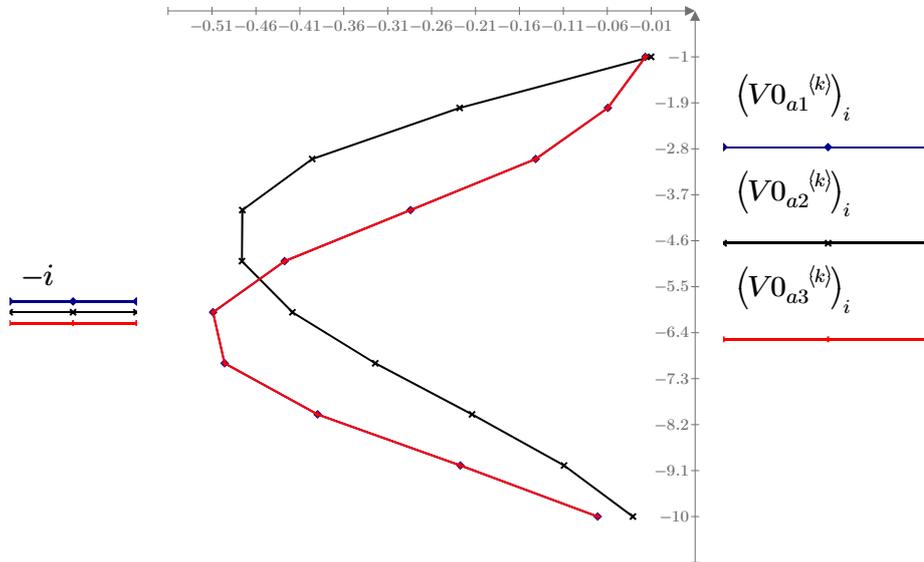
$f_{0a}^{(3)} := \text{READTEXT}("c_f0a.dat")$

$V0_{a3} := \text{READTEXT}("c_V0a.dat")$

$i := 1, 2 \dots 10$

$k := 2$

$$f_{0a} = \begin{bmatrix} 10.005 & 10.006 & 10.005 \\ 54.771 & 87.098 & 54.771 \\ 135.677 & 0 & 135.677 \\ 233.531 & 0 & 233.531 \\ 368.682 & 0 & 368.682 \\ 554.36 & 0 & 554.36 \\ 775.257 & 0 & 775.257 \\ 1008.843 & 0 & 1008.843 \\ 1221.99 & 0 & 1221.99 \\ 1372.221 & 0 & 1372.221 \end{bmatrix}$$



Vergleich des Ausschwingverhaltens des Gesamtmodells

$x_{b1} := \text{READTEXT}("f_xb.dat")$

$x_{b2} := \text{READTEXT}("g_xb.dat")$

$x_{b3} := \text{READTEXT}("c_xb.dat")$

$t := 0, 0.001..2$

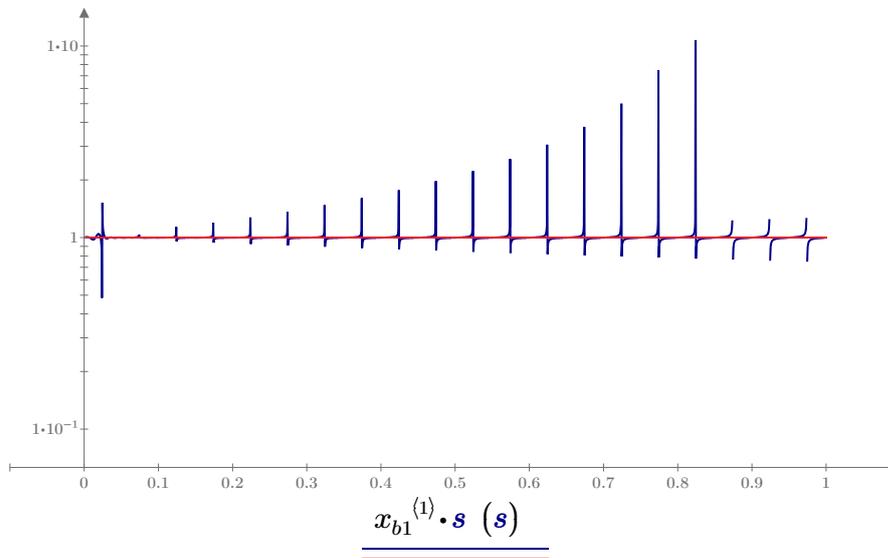
$$rx_{b12} := \begin{pmatrix} \overline{x_{b1}} \\ \overline{x_{b2}} \end{pmatrix} \quad rx_{b13} := \begin{pmatrix} \overline{x_{b1}} \\ \overline{x_{b3}} \end{pmatrix}$$

Knoten Nr.: $k := 1$

$$(rx_{b12}^{(k+1)})^T = [\overset{1}{1.001} \quad \overset{2}{1.003} \quad \dots \overset{4000}{...}]$$

$$(rx_{b13}^{(k+1)})^T = [\overset{1}{1} \quad \overset{2}{1} \quad \overset{3}{1} \quad \overset{4}{1} \quad \overset{5}{1} \quad \dots \overset{4000}{...}]$$

Vergleich Verschiebungsverlauf - B



$$\frac{rx_{b12}^{(k+1)}}{rx_{b13}^{(k+1)}}$$

Vergleich des Biegespannungsverlaufs

$$\sigma_{b1} := \text{READTEXT}("f_sb.dat")$$

$$\sigma_{b2} := \text{READTEXT}("g_sb.dat")$$

$$\sigma_{b3} := \text{READTEXT}("c_sb.dat")$$

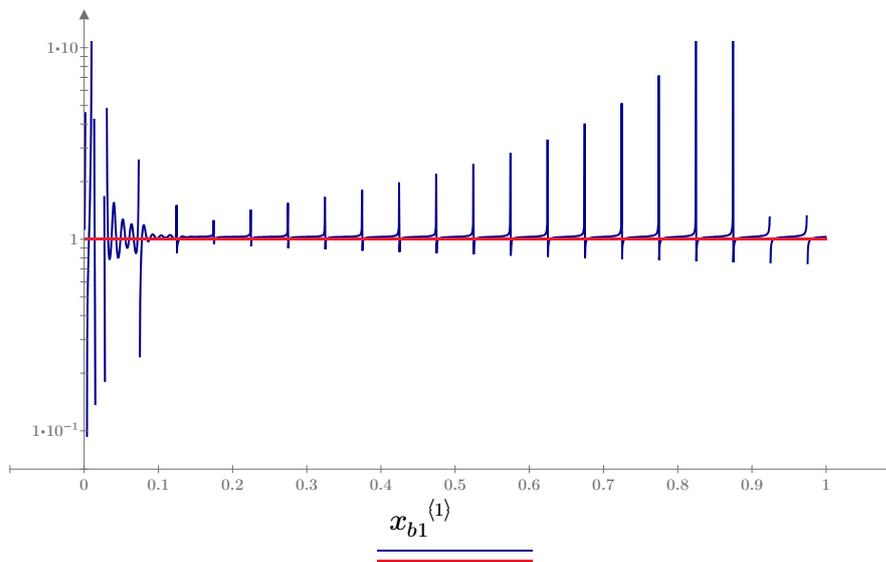
$$t := 0,0.001..1$$

$$r\sigma_{b12} := \left(\frac{\sigma_{b1}}{\sigma_{b2} + 1 \cdot 10^{-12}} \right) \quad r\sigma_{b13} := \left(\frac{\sigma_{b1}}{\sigma_{b3} + 1 \cdot 10^{-12}} \right) \quad \text{Knoten Nr.:} \quad k := 10$$

$$(r\sigma_{b12}^{(k+1)})^T = [\overset{1}{1.121} \quad \overset{2}{1.702} \quad \dots \overset{4000}{\dots}]$$

$$(r\sigma_{b13}^{(k+1)})^T = [\overset{1}{1} \quad \overset{2}{1} \quad \overset{3}{1} \quad \overset{4}{1} \quad \overset{5}{1} \quad \dots \overset{4000}{\dots}]$$

Vergleich Spannungsverlauf - B



$$\frac{r\sigma_{b12}^{(k+1)}}{r\sigma_{b13}^{(k+1)}}$$

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Bad Vöslau, den

Ing. Wolfgang Artner